SỐ CHIỀU XẠ ẢNH VÀ ĐỘ SÂU MODULE; PHỨC KOSZUL

Trần Thị Thùy Dung
Trường Đại học Công nghiệp Quảng Ninh
Email: thuydung294@gmail.com

TÓM TẮT

Giải tự do hữu hạn là một vấn đề được trình bày trong khá nhiều cuốn sách về Đại số đồng điều, vấn đề này được J. Herzog tổng hợp một cách rất hệ thống trong bài viết "Giải tự do hữu hạn". Bài giảng của J. Herzog đã đưa ra những kết quả rất hay về tính chất của một module khi có giải tự do hữu hạn. Trong bài báo này, tôi trình bày phần mở đầu của bài giảng "Số chiều xạ ảnh và độ sâu module; phức Koszul". Phần chiều xạ ảnh và độ sâu module đưa ra các công thức định lí về chiều xạ ảnh, depth; phần phức Koszul chỉ trình bày các khái niệm, kết quả cơ bản nhất đủ để giải quyết bài toán "Trên vành chính quy mọi module hữu hạn sinh đều có giải tự do hữu hạn". Với mục đích trình bày lại một cách có hệ thống, rõ ràng các kiến thức mà tác giả đã sử dụng và chứng minh các mệnh đề, hệ quả mà tác giả đã nêu ra nhưng không chứng minh, để người đọc có thể tiếp cận gần hơn bài giảng của ông và nội dung về giải tự do hữu hạn.

Từ khóa: *dãy khớp; đồng cấu; module; phép giải; xạ ảnh.*

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Để nghiên cứu một cách tổng quát rằng khi nào một module có giải tự do hữu hạn là rất khó, ta chỉ có thể trả lời câu hỏi này với những module trên một số vành đặc biệt như vành Noether địa phương, vành phân bậc. Bài giảng "Giải tự do hữu hạn" của J. Herzog đã đưa ra những kết quả rất đẹp về tính chất của một module khi có giải tự do hữu hạn, xem ([1], [2], [3], [4]). Bài giảng đã được trình bày tại Italy năm 2004 và tại Hà Nội năm 2006. Để người đọc hiểu rõ hơn các nội dung trong bài giảng của ông và về giải tự do hữu hạn, tôi trình bày lại phần mở đầu của bài giảng này.

2. NỘI DUNG

2.1. Số chiều xạ ảnh và độ sâu module

Định nghĩa 2.1.1. *Giả sử M là một R - module, số chiều xạ ảnh của M trên R kí hiệu là proj $\dim_R M$ được cho bởi: proj $\dim_R M = n$ nếu M có một phép giải xạ ảnh có độ dài là n, tức là: $C_i = \mathbf{0}$ với mọi $i > n$ và $C_n \neq \mathbf{0}$ và n là số nguyên bé nhất thoả mãn điều kiện này.*

Nếu không có số n nào vậy thì ta nói:

$$\text{proj}\dim_R M = \infty$$

Ví dụ 1.1.2. Nếu M là R – module xạ ảnh thì proj $\dim_R M = 0$.

Nếu $R = \mathbb{Z}_4 R = \mathbb{Z}_4 R = \mathbb{Z}_4$ và $M = \overline{2}\mathbb{Z}_4$. Xét đồng cấu:

$$\begin{aligned} p: \mathbb{Z}_4 &\to \overline{2}\mathbb{Z}_4 \\ x &\mapsto \overline{2}x \end{aligned}$$

Ta có $\mathrm{Im}(p) = \overline{2}\mathbb{Z}_4 = \mathrm{Ker}(p)$ nên có khớp :

$$0 \to \overline{2}\mathbb{Z}_4 \xrightarrow{i} \mathbb{Z}_4 \xrightarrow{p} \overline{2}\mathbb{Z}_4 \to 0$$

Xét giải:

$$\ldots \to \mathbb{Z}_4 \xrightarrow{\lambda} \mathbb{Z}_4 \xrightarrow{\lambda} \ldots \xrightarrow{\lambda} \mathbb{Z}_4 \xrightarrow{p} \overline{2}\mathbb{Z}_4 \to 0$$

Với $\lambda = i_o p$, đây là giải xạ ảnh của $M = \overline{2}\mathbb{Z}_4$ trên $R = \mathbb{Z}_4$ cho nên proj $\dim_R M = \infty$

Mệnh đề 2.1.3. *Mọi module M trên R đều có một phép giải tự do.*

Chứng minh. Thật vậy, tồn tại F_0 là R – module tự do sao cho ta có dãy khớp ngắn :

$$0 \to M_0 \xrightarrow{\alpha_0} F_0 \xrightarrow{\beta_0} M \to 0$$

Với module M_0 cũng tồn tại F_1 là R – module tự do để có dãy khớp ngắn:

$$0 \to M_1 \xrightarrow{\alpha_1} F_1 \xrightarrow{\beta_1} M_0 \to 0$$

Bằng quy nạp ta suy ra với mọi số nguyên n > 0 ta có một dãy khớp ngắn:

$$0 \to M_n \xrightarrow{\alpha_n} F_n \xrightarrow{\beta_n} M_{n-1} \to 0$$

trong đó F_n là R – module tự do. Xét một dãy:

$$C: \dots \to C_{n+1} \xrightarrow{\sigma_{n+1}} C_n \xrightarrow{\sigma_n} C_{n-1} \to \cdots$$

những module trên R mà:

$$C_n = \begin{cases} M \text{ nếu } n = -1 \\ F_n \text{ nếu } n \geq 0 \\ 0 \text{ nếu } n < -1 \end{cases}$$

và $\sigma_n = \begin{cases} \beta_0 \text{ nếu } n = 0 \\ \alpha_{n-1} \circ \beta_n \text{ nếu } n > 0 \\ 0 \text{ nếu } n < 0 \end{cases}$

Để chứng minh C là phép giải xạ ảnh của M ta còn phải chứng minh nó là dãy khớp. Tức là: $\mathrm{Im}(\sigma_{n+1}) = \mathrm{Ker}(\sigma_n)$ với mọi $n \geq 0$.

Vì σ_n là đơn cấu và β_n là toàn cấu với mọi $n \geq 0$ nên ta có:

$$\mathrm{Im}(\sigma_{n+1}) = \mathrm{Im}(\alpha_n) = \mathrm{Ker}(\beta_n) = \mathrm{Ker}(\sigma_n)$$

với mọi $n \geq 0$.

Như vậy mệnh đề được chứng minh.

Định lí 2.1.4. *Giả sử m là một số nguyên không âm. Với một module tùy ý M trên R và tự đồng cấu đồng nhất $i: M \to M$, các phát biểu sau tương đương:*

i) M có số chiều xạ ảnh nhỏ hơn hoặc bằng m.

ii) $Ext^{m+1}(M, Y) = 0$ với mọi module Y trên R .

iii) Mọi dãy khớp:

$$0 \to A \to C_{m-1} \to \cdots \to C_1 \to C_0 \to M \to 0$$

với $C_0, C_1, \dots, C_{m-1}$ là các module xạ ảnh trên R, module A là xạ ảnh.

Chứng minh. Ta chứng minh theo sơ đồ $\mathrm{i} \Rightarrow \mathrm{ii} \Rightarrow \mathrm{iii} \Rightarrow \mathrm{i}$.

$\mathrm{i} \Rightarrow \mathrm{ii})$

Giả sử $\mathrm{proj\ dim}_R M \leq m$. Khi đó tồn tại phép xạ ảnh C:

$$\dots \to C_{n+1} \xrightarrow{\sigma_{n+1}} C_n \xrightarrow{\sigma_{n-1}} C_{n-1} \to \cdots$$

của M mà $C_n = 0, \forall n > m$. Do đó dãy:

$$\mathrm{Hom}(C_{n-1}, Y) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(\sigma_n, i)} \mathrm{Hom}(C_n, Y) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(\sigma_{n+1}, i)} \mathrm{Hom}(C_{n+1}, Y) \to$$

Sẽ có

$$\mathrm{Ext}^n(M, Y) = \mathrm{Ker}[\mathrm{Hom}(\sigma_{n+1}, i)]/\mathrm{Im}[\mathrm{Hom}(\sigma_n, i)] = 0, \forall n > m.$$

Cho $n = m + 1$ thì $\mathrm{Ext}^{m+1}(M, Y) = 0$.

$\mathrm{ii} \Rightarrow \mathrm{iii})$

$$0 \to A \xrightarrow{f} C_{m-1} \xrightarrow{\sigma_{m-1}} \dots \to C_1 \to C_0 \xrightarrow{\sigma_0} M \to 0$$

là khớp nên:

(1) $\quad 0 \to A \xrightarrow{f} C_{m-1} \to D_{m-2} \to 0.$

là khớp với $D_{m-2} = \mathrm{Im}(\sigma_{m-1}) = \mathrm{Ker}(\sigma_{m-2})$. Tương tự có các dãy khớp:

(2) $\quad 0 \to D_{m-2} \to C_{m-2} \to D_{m-3} \to 0.$

....

(m-1) $\quad 0 \to D_1 \to C_1 \to D_0 \to 0.$

(m) $\quad 0 \to D_0 \to C_0 \to M \to 0.$

Do $\mathrm{Ext}(C_{m-1}, Y) = 0$ vì C_{m-1} là xạ ảnh nên (1) cho ta dãy khớp:

$$\dots \to \mathrm{Hom}(C_{m-1}, Y) \to \mathrm{Hom}(A, Y) \xrightarrow{\delta_0} \mathrm{Ext}(D_{m-2}, Y) \to 0.$$

Vì thế δ_0 là một toàn cấu.

Cũng do tính chất $\mathrm{Ext}^n(B, Y) = 0, \forall n > 0$ nếu B là module xạ ảnh nên (2) cho ta dãy khớp:

$$0 \to \mathrm{Ext}(D_{m-2}, Y) \xrightarrow{\delta_1} \mathrm{Ext}^2(D_{m-3}, Y) \to 0$$

Suy ra $\delta_1: \mathrm{Ext}(D_{m-2}, Y) \to \mathrm{Ext}^2(D_{m-3}, Y)$ là đẳng cấu.

Tương tự như vậy đến bước thứ m ta có:

$\delta_{m-1}: \mathrm{Ext}^{m-1}(D_0, Y) \to \mathrm{Ext}^m(M, Y)$ là đẳng cấu.

Do đó $\delta = \delta_{m-1} \circ \dots \delta_1 \circ \delta_0$ là một toàn cấu. Như vậy ta có dãy khớp:

$$\mathrm{Hom}(C_{m-1}, Y) \to \mathrm{Hom}(A, Y) \xrightarrow{\delta} \mathrm{Ext}^m(M, Y) \to 0$$

Giả sử $k: B \to C$ là một toàn cấu bất kì. Thì $\beta = \mathrm{Hom}(i, k): \mathrm{Hom}(A, B) \to \mathrm{Hom}(A, C)$ là toàn cấu.

Vì trong biểu đồ:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{Hom}(C_{m-1}, B) & \to & \mathrm{Hom}(A, B) & \to & \mathrm{Ext}^m(M, B) & \to & 0 \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \\ \mathrm{Hom}(C_{m-1}, C) & \to & \mathrm{Hom}(A, C) & \to & \mathrm{Ext}^m(M, C) & \to & 0 \end{array}$$

có C_{m-1} là xạ ảnh nên α là toàn cấu.

Nếu $D = \mathrm{Ker}(k)$ thì ta có dãy khớp ngắn:

$$0 \to D \xrightarrow{j} B \xrightarrow{k} C \to 0$$

Như vậy ta lại được dãy khớp:

$$\to \mathrm{Ext}^m(M,B) \xrightarrow{\gamma} \mathrm{Ext}^m(M,C) \to \mathrm{Ext}^{m+1}(M,D)$$

Theo giả thiết $\mathrm{Ext}^{m+1}(M,D) = 0$ nên γ là toàn cấu. Suy ra β toàn cấu. Vậy A là module xạ ảnh.

$\mathrm{iii} \Rightarrow \mathrm{i})$

Giả sử C là một phép giải xạ ảnh bất kì của M:

$$C: \ldots \to C_{n+1} \xrightarrow{\sigma} C_n \xrightarrow{\sigma} C_{n-1} \to$$

Đặt $A = \mathrm{Im}(\sigma_m)$ thì:

$$0 \to A \to C_{m-1} \to \cdots \to C_1 \to C_0 \to M \to 0$$

là khớp nên A là module xạ ảnh. Vậy đây là phép giải xạ ảnh của M. Do đó: $\mathrm{proj\ dim}_R M \le m$. Định lí được chứng minh xong.

Hệ quả 2.1.5. *Kí hiệu C là phép giải xạ ảnh của M khi đó:*

$$\mathrm{proj\ dim}_R M = \inf\{n: \mathrm{Ext}^m(M,Y) = 0, \forall m > n, \forall Y\}$$
$$= \inf\{n | \exists (C): C_m = 0, \forall m > n\}$$

Định lí 2.1.6. *Cho (R,m) là một vành Noether địa phương, M là một module hữu hạn sinh. Khi đó $proj\ dim_R M \le n \Leftrightarrow Tor_{n+1}(M,N) = 0$ với mọi N là R – module.*

Chứng minh. Chiều thuận là hiển nhiên.

Đảo lại: Giả sử $\mathrm{Tor}_{n+1}(M,N) = 0$. Xét một dãy khớp bất kì các R – module:

$$0 \to K_{n-1} \to X_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} X_{n-2} \to \cdots \xrightarrow{d_1} X_0 \xrightarrow{d_0} M \to 0$$

Với các X_i là các module xạ ảnh, ta chứng minh K_{n-1} là xạ ảnh $\Leftrightarrow$ K_{n-1} là module tự do $\Leftrightarrow \mathrm{Tor}(K_{n-1},N) = 0$.

Đặt $K_i = \mathrm{Ker} d_i$, với mọi $i = 0,1,\ldots,n-2$. Ta có các dãy khớp:

(1) $0 \to K_0 \to X_0 \to M \to 0$

(2) $0 \to K_1 \to X_1 \to K_0 \to 0$

....

(n) $0 \to K_{n-1} \to X_{n-1} \to K_{n-2} \to 0$

Khi đó dựa vào điều kiện X_i là module xạ ảnh ta sẽ có:

$$\mathrm{Tor}_{n+1}(M,N) \cong \mathrm{Tor}_n(K_0,N).$$
$$\mathrm{Tor}_n(K_0,N) \cong \mathrm{Tor}_{n-1}(K_1,N).$$

....

$$\mathrm{Tor}_2(K_{n-2},N) \cong \mathrm{Tor}(K_{n-1},N).$$

Như vậy: $\mathrm{Tor}(K_{n-1},N) \cong \mathrm{Tor}_{n+1}(M,N) = 0$. Nên K_{n-1} là module xạ ảnh.

Theo định lí 21.4, suy ra $\mathrm{proj\ dim}_R M \le n$.

Hệ quả 2.1.7. *Với các giả thiết như (2.1.6) ta có:* $\mathrm{proj\ dim}_R M \le n \Leftrightarrow \mathrm{Tor}^R_{n+1}(M,N) = 0$.

Cụ thể hơn $\mathrm{proj\ dim}_R M$ là số nguyên n lớn nhất để $\mathrm{Tor}^R_{n+1}(M,k) \ne 0$.

Ta nói $x \in R$ là một phần tử M – chính quy nếu xz = 0 với $z \in M$ thì z = 0.

Định nghĩa 2.1.8. *Một dãy $x = x_1, x_2, \ldots, x_n$ các phần tử của R được gọi là một M – dãy chính quy hay đơn giản là một M – dãy nếu các điều kiện sau được thỏa mãn:*

i) x_i là một phần tử $M/(x_1,x_2,\ldots,x_{i-1})M$ -chính qui với mọi i = 1, ..., n.

ii) $M/xM \ne 0$.

Định lí 2.1.9. *Cho R là vành Noether và M là R – module hữu hạn sinh. Giả sử I là một ideal thỏa mãn $IM \ne M$, thì hai M – dãy lớn nhất bất kì chứa trong I có chiều dài bằng nhau.*

Định nghĩa 2.1.10. *Với các giả thiết của (2.1.9), chiều dài của M – dãy lớn nhất trong I được gọi là bậc của I trong M, kí hiệu là: grade(I,M).*

Ta cũng định nghĩa gradeI = grade(I,R) = grade(R/I).

Trong trường hợp I = m ta gọi bậc của m trong M là depthM.

Nhận xét:

1. $\mathrm{grade}(I,M) = \min\{i: \mathrm{Ext}^i_R(R/I,M) \ne 0\}$.

2. $\mathrm{grade}I \le \mathrm{proj\ dim}R/I$.

Từ đó ta thu được kết quả sau:

Định lí 2.1.11. *Giả sử I là một ideal của R khi đó: $grade(I,M) \ge 2$ khi và chỉ khi đồng cấu tự nhiên $M \to Hom_R(I,M)$ là một đẳng cấu.*

Định lí 2.1.12. *(R, M) là một vành Noether địa phương, và một dãy khớp ngắn các mudule hữu hạn sinh trên R:*

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

Khi đó ta sẽ có:

1. $depthB \ge \min\{depthA, depthC\}$

2. $depthA \geq \min\{depthB, depthC + 1\}$

3. $depthC \geq \min\{depthA - 1, depthB\}$

Chứng minh. Từ giả thiết ta có dãy khớp:

$$\ldots \to \mathrm{Ext}_R^{i-1}(k, C) \to \mathrm{Ext}_R^{i}(k, A) \to \mathrm{Ext}_R^{i}(k, B) \to \mathrm{Ext}_R^{i}(k, C) \to \mathrm{Ext}_R^{i+1}(k, A) \to \cdots$$

Như vậy nếu $\mathrm{Ext}_R^{i}(k, C) = \mathrm{Ext}_R^{i+1}(k, A) = 0$ thì

$\mathrm{Ext}_R^{i}(k, B) = 0$. Nên ta có ngay khẳng định (1). Các khẳng định (2) và (3) hoàn toàn tương tự.

Hệ quả 2.1.13. *Trong bổ đề trên nếu* $depthB > depthC$ thì $depthA = depthC + 1$.

2.2. Phức Koszul

Định nghĩa 2.1. Cho n phần tử $x_1, x_2, \ldots, x_n \in R$, và kí hiệu $\underline{x} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

Giả sử F là một R – module tự do có cơ sở $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ thì thành phần thuần nhất thứ r của đại số ngoài $\wedge^r F$ là R – module tự do hạng C_n^r với cơ sở $\{e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_r}\}$ ở đó:

$$1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq n.$$

Ta kí hiệu $K_r = \wedge^r F$. Ánh xạ vi phân

$d: K_p \to K_{p-1}$ cho bởi công thức:

$$d\left(e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p}\right) = \sum_{r=1}^{p} (-1)^{r-1} x_{i_r} e_{i_1} \wedge \ldots \wedge \widehat{e_{i_r}} \wedge \ldots \wedge e_{i_p}$$

Nếu P = 1 đặt $d(e_i) = x_i$. Khi đó phức Koszul $K.(\underline{x})$ được định nghĩa như sau:

$$K.(\underline{x}) \ldots \to K_p \xrightarrow{d} K_{p-1} \xrightarrow{d} \ldots \xrightarrow{d} K_1 \xrightarrow{d} K_0 \to 0 \quad (1)$$

trong đó $K_0 = R, K_p = 0$ nếu $p > n$ và với $1 \leq p \leq n$ thì $K_p = \wedge^p F$.

Nếu cho C là phức các R – module, ta kí hiệu $C(\underline{x}) = K.(\underline{x}) \otimes C$ và kí hiệu $K.(\underline{x}, M) = K.(\underline{x}) \otimes M$.

Định lí 2.2. *Cho C là phức các R – module, các phần tử $x \in R$ và dãy khớp:*

$$0 \to C \to C(x) \to C' \to 0$$

trong đó, $C'_{p+1} = C_p$, ánh xạ vi phân trên C' trùng với ánh xạ vi phân trên C. Khi đó ta có dãy khớp dài các R – module đồng điều:

$$\ldots \to H_p(C(x)) \to H_p(C(x)) \to \cdots$$

$$\ldots \to H_{p-1}(C) \xrightarrow{(-1)^{p-1}(x)} H_{p-1}(C) \to \cdots$$

Hệ quả 2.3. *Cho* $x_1, x_2, \ldots, x_n \in R$ *ta có dãy khớp dài các module đồng điều:*

$$\ldots \to H_p(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, M) \to H_p(x_1, x_2, \ldots, x_n, M) \to H_{p-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, M) \to \cdots$$

*Chứng minh***.** Áp dụng định lí trên với $C = C(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$.

Định lí 2.4. *Giả sử* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *là một M – dãy, và* $X = K(M, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *là giải Koszul của M trên* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *thì:*

$$\begin{cases} H_i(x) = 0; \forall i \geq 1 & (1) \\ H_0(x) \cong \dfrac{M}{(x_1, x_2, \ldots, x_n)M} & (2) \end{cases}$$

Chứng minh. Từ định nghĩa về phức Koszul của M trên $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ta có dãy khớp sau:

$$K.(\underline{x}, M): 0 \to X_n \xrightarrow{d_n} \ldots \xrightarrow{d_1} X_0 \xrightarrow{d_0} \frac{M}{(x_1, x_2, \ldots, x_n)M} \to 0$$

(Với $X_i = K_i \otimes M, \forall i = \overline{1, n}$)

Chính vì thế (2) đúng.

Ta chứng minh (1) quy nạp theo n.

Khi n = 1 ta có $H_1(x_1, M) = \mathrm{Ann}_M(x_1) = 0$. Giả sử định lí đúng với mọi $k < n$, ta chứng minh định lí cũng đúng với n.

Khi p = 1, theo hệ quả trên ta có dãy khớp:

$$0 \to H_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, M) \to H_0(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, M) \xrightarrow{.x} H_0(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, M)$$

Đặt $M_i = M/(x_1, x_2, \ldots, x_i)M$, theo hệ quả (2) ta có $M_{n-1} \cong H_0(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, M)$. Vì x_n chính là M_{n-1} - chính quy nên đồng cấu nhân với x_n của dãy khớp trái trên là đơn cấu. Vậy

$$H_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, M) = 0.$$

Khi $P > 1$ theo định lí trên ta có dãy khớp:

$$\ldots \to H_p(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, M) \to H_p(x_1, x_2, \ldots, x_n, M) \to H_{p-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, M) \to \cdots$$

Theo giả thiết quy nạp: $H_p(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, M) = 0$

và $H_{p-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, M) = 0$ nên ta suy ra $H_p(x_1, x_2, \ldots, x_n, M) = 0$.

3. KẾT QUẢ VÀ THẢO LUẬN

Trong bài báo, tác giả đã trình bày lại nội dung: số chiều xạ ảnh, độ sâu module và phức Koszul. Đưa ra các định nghĩa, chứng minh các định lí và hệ quả giúp người đọc tiếp cận một bước gần hơn với những vấn đề trong bài giảng của J. Herzog.

4. KẾT LUẬN

Bài báo góp phần làm cho người đọc tiếp cận một bước gần hơn với những vấn đề trong bài giảng của J. Herzog. Các kiến thức tôi sử dụng đều dựa trên những khái niệm rất cơ bản về module Noether và vành địa phương, tuy nhiên có những chứng minh khá lí thú, cho chúng ta kết quả hay, các định lí nhằm mục đích giải quyết rõ ràng những nội dung mà J. Herzog đưa ra.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Dương Quốc Việt (2005), Một số cấu trúc cơ bản của đại số hiện đại. Nhà xuất bản ĐHSP Hà Nội.
2. M. F. Atiyah, I. G. Macdonald (1969), Introduction to Commutative Algebra. Addison-Wesley Publishing Company.
3. W. Bruns and J. Herzog (1993), Cohen-Macaulay Rings. Cambridge Univ. Press, Cambridge.
4. J. Herzog (2002), Finite free resolution. School on Commutative Algebra and Interactions with Algebraic Geometry nd Combinatori.

Thông tin của tác giả*:*

ThS. Trần Thị Thùy Dung
Khoa Khoa học Cơ bản, Trường Đại học Công nghiệp Quảng Ninh
Điện thoại: +(84).975.17.97.4
Email: thuydung294@gmail.com

THE NUMBER OF PROJECTIVE DIMENSIONS AND THE MODULE DEPTH; KOSZUL COMPLEX

Information about authors:

Tran Thi Thuy Dung, M.Sc., Faculty of fundamental Science,, Quang Ninh University of Industry, email: thuydung294@gmail.com

ABSTRACT

Finite free resolution is a problem presented in quite a few books on Homomorphic Algebra, this problem is systematically summed up by J. Herzog in his article: Finite free resolutions. The lecture by J. Herzog gave very good results on the properties of a module when it has finite free resolution. In this paper, I present the introduction of the lecture: number of projective dimensions and module depth; Koszul complex. The projective dimension and depth module gives theorem formulas about the projective dimension, depth; The Koszul complex part presents only the most basic concepts and results to solve the problem: On a regular ring, every generated finite module has finite free resolution (later part of the lecture). For the purpose of systematically and clearly restating the knowledge that the author has used and proved the clauses and consequence that the author has stated but not proved, so that readers can approach than his lecture and the content on finite free resolution.

Keywords: Joint series; Homomorphic; Modules; Solution; Projective.

REFERENCES

1. Duong Quoc Viet (2005), *Some basic structures of modern algebra.* University of Education Publishers.
2. M. F. Atiyah, I. G. Macdonald (1969), *Introduction to Commutative Algebra*. Addison-Wesley Publishing Company.
3. W. Bruns and J. Herzog (1993), *Cohen-Macaulay Rings.* Cambridge Univ. Press, Cambridge.
4. J. Herzog (2002), *Finite free resolution*. School on Commutative Algebra and Interactions with Algebraic Geometry and Combinatori.

Ngày nhận bài: 13/3/2023*;*
Ngày gửi phản biện: 14/3/2023*;*
Ngày nhận phản biện: 12/4/2023*;*
Ngày chấp nhận đăng: 15/4/2023.