ỨNG DỤNG CỦA KHAI TRIỂN TAYLOR TRONG BÀI TOÁN TÍNH GIỚI HẠN

Nguyễn Thanh Huyền
Trường Đại học Công nghiệp Quảng Ninh
Email: thanhhuyen1107@gmail.com

TÓM TẮT

Trong bài viết, tác giả trình bày công thức khai triển Taylor, trong đó có khai triển Taylor của hàm hợp, các tính chất mở rộng của vô cùng bé. Các lý thuyết trên là cơ sở để tác giả trình bày lời giải của một số bài toán tính giới hạn phức tạp. Từ đó, người đọc có phương pháp giải được một lớp tương đối rộng các dạng bài tập tính giới hạn từ đơn giản đến phức tạp, trong đó một số bài không thể giải được bằng các phương pháp thông thường như sử dụng quy tắc Lopital, phương pháp sử dụng hàm tương đương,vô cùng bé.

Từ khóa: *Chuỗi Taylor, hữu hạn, hàm tương đương, hàm hợp.*

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Tính giới hạn hàm số là một trong các bài toán cơ bản của giải tích. Nói tới phương pháp tính giới hạn, người ta thường nói tới quy tắc Lopital và phương pháp sử dụng hàm tương đương, vô cùng bé. Tuy nhiên, với một số bài toán phức tạp, không thể sử dụng phương pháp thông thường trên. Trong bài báo này, tác giả bài viết trình bày hệ thống các lý thuyết về tính giới hạn bằng cách sử dụng chuỗi Taylor, kết hợp với kiến thức về hàm tương đương, vô cùng bé và chỉ ra mối liên hệ của các khái niệm trên, giúp người đọc có thể áp dụng các lý thuyết trên như một công cụ đa năng để tính giới hạn, có thể áp dụng nhanh cho hầu hết các dạng bài tập, đặc biệt các trường hợp phức tạp khó có thể áp dụng phương pháp thông thường.

2. PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

2.1. Chuỗi Taylor và chuỗi Mac Laurin

Giả sử hàm số $f(x)$ có đạo hàm mọi cấp trong một lân cận nào đó của điểm x_0. Ta gọi chuỗi

$$f(x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

là chuỗi Taylor của hàm $f(x)$ tại x_0.

Trường hợp $x_0 = 0$, ta có chuỗi Mac Laurin.

Nếu chuỗi Taylor của hàm số $f(x)$ hội tụ và có tổng bằng $f(x)$, ta nói $f(x)$ khai triển được thành chuỗi Taylor và có thể viết

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 +$$

Khai triển một số hàm sơ cấp thành chuỗi Mac Laurin :

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots (1).$$
$$-\infty < x < +\infty$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{(n-1)}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots (2)$$
$$-\infty < x < +\infty$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots (3)$$
$$-\infty < x < +\infty$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{(n-1)}\frac{x^n}{n} + \cdots (4) \qquad -1 < x < 1.$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)x^2}{2!} + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)x^n}{n!} + \cdots (5)$$
$$-1 < x < 1.$$

2.2. Tính chất vô cùng bé

Để đơn giản, trong các tính chất trình bày sau đây, ta quy ước khi viết $0(f(x)) = 0(g(x)), x \to \alpha,$ ta hiểu là VCB bậc cao hơn $f(x)$ khi $x \to \alpha$ cũng là VCB bậc cao hơn $g(x)$.

Tính chất 1. Nếu $m, n \in N^*, m > n$

thì $(x-x_0)^m = 0[(x-x_0)^n]$.

Từ đây ta có kết quả sau:

Nếu $f(x)$ khai triển được thành chuỗi Taylor tâm x_0

$$f(x) = f(x_0) + \alpha_1.(x-x_0)^{n_1} + \alpha_2.(x-x_0)^{n_2} + \cdots$$
$$+\ldots+\alpha_k.(x-x_0)^{n_k} + \cdots$$

$(\alpha_i \in N^*, \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_{n<\ldots})$.

Khi đó ta có thể viết:

$$f(x) = f(x_0) + \alpha_1.(x-x_0)^{n_1} + 0((x-x_0)^{n_1}).$$

Tính chất 2. Nếu $f(x)$ là VCB bậc cao hơn $g(x)$ khi $x \to \alpha$ và C là hằng số thì C. $f(x)$ cũng là VCB bậc cao hơn VCB $g(x)$ khi $x \to \alpha$.

Để đơn giản, ta có thể viết

$$0\big(C.f(x)\big) = 0\big(g(x)\big), x \to \alpha.$$

Tính chất 3.

$$0\big[C.f(x) + 0\big(f(x)\big)\big] = 0\big(f(x)\big), x \to \alpha.$$

Tính chất 4. Nếu $g(x)$ là VCB bậc cao hơn VCB $f(x)$ khi $x \to \alpha$ thì với mọi $m \in N^*$ *ta có*

$$[f(x) + g(x)]^m = [f(x)]^m + 0([f(x)]^m).$$

Tính chất 5.

Giả sử khi $x \to 0$

$$f(x) = ax^m + 0(x^m), g(x) = bx^n + 0(x^n), a, b \neq 0$$

Khi đó

a) Nếu $n = m$ thì

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$$

b) Nếu $n > m$ thì

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

.c) Nếu $n < m$ thì $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \infty$

Chứng minh.

a) Với $n = m$, ta có $f(x) = ax^n + 0(x^n)$.

Chia cả tử thức và mẫu thức cho x^n ta được

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{ax^n + 0(x^n)}{x^n} : \frac{bx^n + 0(x^n)}{x^n}\right) = \frac{a}{b}$$

$$b)\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{ax^m + 0(x^m)}{x^n} : \frac{bx^n + 0(x^n)}{x^n}\right)$$

$$= \frac{0}{b} = 0.$$

c) Theo b) ta có $\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{f(x)} = 0$, từ đó suy ra $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \infty$.

Tính chất 6.

a) $f(x) \sim g(x), x \to a$ thì

$g(x) = f(x) + 0(x-a), x \to a.$

b) $f(x) \sim g(x), g(x) \sim h(x), x \to a$

thì $f(x) \sim h(x), x \to a$)

2.3. Khai triển hàm hợp thành chuỗi Taylor

Cho hai hàm $f(x)$ và $g(x)$ triển được thành chuỗi Taylor ở lân cận $x = 0$ có khoảng hội tụ lần lượt là $(-r_1; r_1)$ và $(-r_2; r_2)$. Giả sử

$$f(y) = a_0 + a_1.y + a_2.y^2 + \cdots + a_n.y^n + \cdots$$
$$g(x) = b_0 + b_1.y + b_2.y^2 + \cdots + b_m.y^m + \cdots$$

Khi đó , nếu

$$|g(x)| = |b_0 + b_1.y + b_2.y^2 + \cdots + b_m.y^m + \ldots| < r_1$$

thì chuỗi

$$a_0 + a_1.g(x) + a_2.\big(g(x)\big)^2 + \cdots + a_n.\big(g(x)\big)^n + \cdots$$

hội tụ về hàm $f(g(x))$, tức là có thể viết

$$f\big(g(x)\big) = a_0 + a_1.g(x) + a_2.\big(g(x)\big)^2 + \cdots + +a_n.\big(g(x)\big)^n + \cdots \qquad (6)$$

(6) là cơ sở lý thuyết giúp người làm toán có thể tính được giới hạn của hàm hợp, khi mà không thể sử dụng phương pháp thông thường.

Trong các bài toán được trình bày dưới đây, khi nói về các hàm là vô cùng bé mà không nói gì thêm, ta hiểu các hàm đó là vô cùng bé khi $x \to 0$.

Bài toán 1

Tính giới hạn

$$\lim_{x\to 0}\frac{sin\sqrt{1+x^3} - sin1}{\sqrt[5]{1-2xlncosx} - 1} = 0.$$

Giải.

Cách 1.

$$sin\sqrt{1+x^3} - 1 = 2cos\frac{\sqrt{1+x^3}+1}{2}.sin\frac{\sqrt{1+x^3}-1}{2}$$

Ta có

$$sin\frac{\sqrt{1+x^3}-1}{2} \sim \frac{\sqrt{1+x^3}-1}{2}.$$

.

Do đó

$$sin\frac{\sqrt{1+x^3}-1}{2} \sim \frac{x^3}{4}.$$

.

Lại có

$$\sqrt[5]{1-2xlncosx}-1 \sim \frac{1}{5}(-2xlncosx).$$

$$(ln(cosx)=ln\left(1-2sin^2\frac{x}{2}\right) \sim -\frac{x^2}{2}.$$

Vậy ta có:

$$\sqrt[5]{1-2xlncosx}-1 \sim \frac{-2x}{5}\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

hay $$\sqrt[5]{1-2xlncosx}-1 \sim \frac{x^3}{5} \quad (7)$$

Thay thế VCB tương đương ta có

$$\lim_{x\to 0}\frac{sin\sqrt{1+x^3}-sin1}{\sqrt[5]{1-2xlncosx}-1} = \lim_{x\to 0}\frac{2cos\frac{\sqrt{1+x^3}+1}{2}.\frac{x^3}{4}}{\frac{1}{5}x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2cos1.\frac{x^3}{4}}{\frac{1}{5}x^3} = \frac{5}{2}.cos1.$$

Cách 2.

Xét khai triển của hàm $z = siny$ tại $y = 1$

$siny = sin1 + cos1.(y-1) + 0(y-1).(8)$

Từ (5) ta có

$\sqrt{1+x^3} = 1 + \frac{1}{2}x^3 + 0(x^3).$

Chuỗi (2) có bán kính hội tụ bằng $+\infty$ nên áp dụng tính chất 2 và tính chất 3 ta có

$$sin\sqrt{1+x^3} = sin\left(1+\frac{1}{2}x^3+0(x^3)\right)$$

$$= sin1 + cos1.\left[\frac{1}{2}x^3+0(x^3)\right] + 0\left(\frac{1}{2}x^3+0(x^3)\right)$$

$$sin\sqrt{1+x^3} - sin1 = \frac{1}{2}cos1.x^3 + 0(x^3).$$

Từ (7) ta có

$$\lim_{x\to 0}\frac{sin\sqrt{1+x^3}-sin1}{\sqrt[5]{1-2xlncosx}-1} = \lim_{n\to 0}\frac{\frac{1}{2}.cos1.x^3+0(x^3)}{\frac{1}{5}x^3+0(x^3)} =$$

$= \frac{5}{2}cos1$. (Áp dụng tính chất (5))

Trong cách 1 của bài toán 1, để sử dụng cặp hàm tương đương cần có sự biến đổi biểu thức (công thức cộng trong lượng giác), cách 2 tác giả đã trình bày phương pháp khai triển hàm hợp thành chuỗi Taylor mà không cần phải sử dụng phép biến đổi.

Tuy nhiên, với bài toán 2 sau đây thì người làm toán khó có thể tính được bằng phương pháp thông thường như sử dụng quy tắc Lopital, phương pháp thay thế cặp hàm tương đương hay dùng biến đổi biểu thức trước khi thay thế cặp hàm tương đương như bài toán 1.

Bài toán 2. Tính

$$\lim_{x\to 0}\frac{ln\sqrt{cosx}-x^2}{\left[cos\sqrt{1+ln(x+1)}-cos1\right]^2}$$

Giải. Ta có

$$cosx = 1 - \frac{x^2}{2} + 0(x^2).$$

Vì bán kính hội tụ của chuỗi (5) bằng 1 và với mọi x trong lân cận đủ nhỏ của 0, $-1 < cosx < 1$ nên áp dụng công thức khai triển Taylor hàm hợp ta có:

$$\sqrt{cosx} = 1 + \frac{1}{2}\left[-\frac{x^2}{2}+0(x^2)\right] + 0\left[-\frac{x^2}{2}+0(x^2)\right].$$

Áp dụng tính chất 3 ta có

$$\sqrt{cosx} = 1 - \frac{x^2}{4} + 0(x^2).$$

Vì bán kính hội tụ của chuỗi (4) bằng 1 và với mọi x trong lân cận đủ nhỏ của 0, , $-1 < \sqrt{cosx} < 1$ nên áp dụng khai triển Taylor hữu hạn của hàm hợp ta có $ln\sqrt{cosx} = ln\left[1-\frac{x^2}{4}+0(x^2)\right] = -\frac{x^2}{4} + 0(x^2) + 0\left[-\frac{x^2}{4}+0(x^2)\right]$.

Áp dụng tính chất 3 ta có:

$ln\sqrt{cosx} = -\frac{x^2}{4} + 0(x^2).$

Vậy

$ln\sqrt{cosx} - x^2 = -\frac{5x^2}{4} + 0(x^2).$

Tương tự ta có:

$1 + ln(x+1) = 1 + x + 0(x)$

$\sqrt{1 + ln(x+1)} = \sqrt{1 + x + 0(x)}$

$= 1 + \frac{1}{2}\left(x + 0(x)\right) + 0\left(x + 0(x)\right).$

Suy ra

$\sqrt{1 + ln(x+1)} = 1 + \frac{1}{2}\ x + 0(x)$

Khai triển Taylor hàm số $z = cosy$ tại $x = 1$ ta có $cosy = cos1 - sin1.(y-1) + 0(y-1)$.

Suy ra

$$cos\left(\sqrt{1 + ln(x+1)}\right) = cos\left(1 + \frac{1}{2}x + 0(x)\right) =$$

$$= cos1 - sin1.\left[\frac{1}{2}x + 0(x)\right] + 0\left(\frac{1}{2}x + 0(x)\right).$$

Do đó

$$cos\left(\sqrt{1 + ln(x+1)}\right) = cos1 - sin1.\frac{1}{2}x + 0(x).$$

$$cos\left(\sqrt{1 + ln(x+1)}\right) - cos1 = -sin1.\frac{1}{2}x + 0(x).$$

Áp dụng tính chất 4) trong mục 2.2. ta có

$$\left[cos\left(\sqrt{1 + ln(x+1)}\right) - cos1\right]^2 = sin^2 1.\tfrac{1}{4}x^2 + 0(x^2)$$

Vậy

$$\lim_{x\to 0} \frac{ln\sqrt{cosx} - x^2}{\left[cos\sqrt{1 + ln(x+1)} - cos1\right]^2} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\frac{5x^2}{4} + 0(x^2)}{sin^2 1.\frac{1}{4}x^2 + 0(x^2)} = \frac{-5}{sin^2 1}.$$

3. KẾT QUẢ VÀ THẢO LUẬN

Trong bài báo, tác giả đã trình bày tính chất, ứng dụng của khai triển Taylor, trong đó có khai triển Taylor của hàm hợp và các tính chất mở rộng của vô cùng bé, là cơ sở lý thuyết giúp người đọc có công cụ hữu hiệu để giải các bài toán tính giới hạn phức (đặc biệt khi xuất hiện hàm hợp). Những bài toán này, mặc dù đã sử dụng các phương pháp ứng dụng giải tích khá hiện đại như quy tắc Lopital, phương pháp sử dụng cặp hàm tương đương đều dẫn đến lời giải quá phức tạp hoặc không giải được.

4. KẾT LUẬN

Sau khi đọc lời giải hai bài toán, đặc biệt bài toán 2, người đọc có thể hình dung ra phương pháp tổng quát để giải các bài toán tính giới hạn phức tạp.Từ đó, người đọc cũng có thể dễ dàng đề xuất được các đề bài toán tính giới hạn từ đơn giản đến phức tạp và có một phương pháp tương đối đa năng để giải được hệ thống các bài toán tính giới hạn đó.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Nguyễn Đức Tính (2017), *Giáo trình Toán cao cấp 1*, Trường Đại học Công nghiệp Quảng Ninh.
2. Nguyễn Đình Trí (2009), *Giáo trình Toán học cao cấp tập 2”*, NXB Giáo dục.
3. Nguyễn Thừa Hợp (2007), *Giáo trình giải tích tập 2”*, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội.
4. Huỳnh Văn Dũng(2011), *Một vài ứng dụng của khai triển Taylor*, https://bomongiaitich.wordpress.com.
5. Nguyễn Thị Xuân Mai (2021), *Một số ứng dụng của khai triển Maclaurin trong các bài toán giải tích,* https://sti.vista.gov.vn.

Thông tin của tác giả:

ThS. Nguyễn Thanh Huyền

Trưởng Bộ môn Toán, Khoa Khoa học Cơ bản, Trường Đại học Công nghiệp Quảng Ninh

Điện thoại: 0962328175

Email: *thanhhuyen1107@gmail.com*

THE APPLICATION TAYLOR EXPANSION IN THE PROBLEM OF LIMITS

Information about authors:

Nguyen Thanh Huyen, MSc., Head of Mathematics Department, Faculty of Basic Science, Quang Ninh University of Industry, email: thanhhuyen1107@gmail.com

ABSTRACT:

In the article, the author presented the Taylor expansion formula, Taylor expansion of the composite function, the properties of small ifninity. Based on the above theories, readers can have a theoretical basis to solve a relatively wide class of limit calculation exrcises from simple to complex, overcoming the limitations of the limit calculation method, such as the method using Lopital's rule, the method using the equivalence function, infinity.

Keywords: *Taylor series, limited, equivalence function, combination function, limit*.

REFERENCES

1. Nguyen Duc Tinh (2017), *Textbook of Advanced Mathematics 1*, Quang Ninh University of Industry.
2. Nguyen Dinh Tri (2009), *Textbook of Advanced Mathematics, Volume 2*", Education Publishing House.
3. Nguyen Thua Hop (2007), *Calculus Textbook, Volume 2*", Hanoi National University,Publishing House.
4. Huynh Van Dung (2011), Some applications of Taylor's implementation, *https://bomongiaitich.wordpress.com*.
5. Nguyen Thi Xuan Mai (2021), Some applications of Maclaurin expansion in analytical problems, *https://sti.vista.gov.vn*

Ngày nhận bài: 31/3/2023;
Ngày gửi phản biện: 31/3/2023;
Ngày nhận phản biện: 17/4/2023;
Ngày chấp nhận đăng: 27/4/2023.