

ÁNH XẠ CO KIỂU KANNAN NỘI SUY TRONG KHÔNG GIAN b-METRIC MẠNH

Đoàn Trọng Hiếu^{1,*}¹Trường Đại học Hạ Long

*Email: doantronghieu@daihochalong.edu.vn

TÓM TẮT

Có thể nói rằng lý thuyết điểm bất động được khởi phát từ công trình nghiên cứu của Brouwer năm 1912 và Banach năm 1922. Trong đó, Nguyên lý điểm bất động Banach đóng vai trò trung tâm của lý thuyết này, nó có thể cho chúng ta một điều kiện đủ để một ánh xạ từ không gian metric đầy đủ vào chính nó có điểm bất động duy nhất. Nguyên lý điểm bất động Banach còn là công cụ quan trọng để nghiên cứu sự tồn tại nghiệm của phương trình vi phân, hệ phương trình tuyến tính, phương trình tích phân và một số ứng dụng khác. Bài báo này, tác giả cải tiến Nguyên lý điểm bất động Banach dưới khía cạnh nội suy trên không gian b -metric mạnh. Bằng cách sử dụng khái niệm nội suy, tác giả đề xuất một dạng ánh xạ co mới trên không gian metric suy rộng. Kết quả thu được trong bài báo là tổng quát so với kết quả của Kannan. Ngoài ra, một ví dụ để minh họa cho kết quả lý thuyết cũng được thiết lập.

Từ khóa: Điểm bất động, b -metric mạnh, không gian b -metric mạnh, ánh xạ co kiểu Kannan nội suy.

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Song song với việc nghiên cứu sự tồn tại nghiệm của các phương trình vi phân thường, định lý điểm bất động của Banach đóng vai trò trung tâm trong lý thuyết điểm bất động trên không gian metric. Do đó, nhiều tác giả đã cải tiến, mở rộng và khái quát hóa định lý điểm bất động của Banach theo nhiều hướng khác nhau (xem [1] và hàng trăm tài liệu tham khảo trong đó). Mặt khác, năm 1968, R. Kannan [2] đã chứng minh định lý sau.

Định lý 1.1. Cho (M, P) là một không gian metric đầy đủ và T là một ánh xạ từ M vào chính nó thỏa mãn điều kiện:

$$P(T\zeta, T\nu) \leq \eta [P(\zeta, T\zeta) + P(\nu, T\nu)] \quad (1)$$

với mọi $\zeta, \nu \in M$ và $\eta \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$. Khi đó, T có điểm bất động duy nhất $\zeta^* \in M$ và với mỗi $\zeta \in M$ dãy lặp $\{T^n \zeta\}$ hội tụ đến ζ^* .

Lớp ánh xạ thỏa mãn điều kiện (1) được gọi là ánh xạ co kiểu Kannan. Không giống như lớp ánh xạ co cổ điển của Banach - vốn luôn liên tục, thì ánh xạ co Kannan không nhất thiết phải liên tục. Tính chất này thể hiện sự khác biệt rõ ràng giữa

hai lớp ánh xạ (xem [3]) và nó đã mở ra hướng nghiên cứu mới, đáng chú ý trong lý thuyết điểm bất động trên các không gian metric. Một tính chất nổi bật và quan trọng của ánh xạ Kannan là có thể mô tả tính đầy đủ của không gian metric theo tính chất điểm bất động của ánh xạ. Điều này được Subramanyam [4] chứng minh năm 1975, nghĩa là: *một không gian metric là đầy đủ khi và chỉ khi mọi ánh xạ Kannan trên đó đều có điểm bất động duy nhất*. Tính chất này không còn đúng đối với ánh xạ co theo nghĩa Banach (xem [5]). Chính sự khác biệt này đã thu hút sự quan tâm sâu rộng của nhiều tác giả, thúc đẩy hàng loạt công trình nghiên cứu cả trong nước và quốc tế (xem [7 – 11]...). Năm 2014, Kirk và Shahzad [6] giới thiệu khái niệm không gian b -metric mạnh, đây là một tổng quát hóa thực sự của khái niệm không gian metric. Song song đó, các tác giả đã phát triển nguyên lý điểm bất động của Banach trên lớp không gian b -metric mạnh. Bài báo này giới thiệu khái niệm ánh xạ co kiểu Kannan nội suy trong không gian b -metric mạnh và phát triển một phiên bản mở rộng của Định lý 1.1 trên không gian này.

2. NỘI DUNG NGHIÊN CỨU

2.1. Kiến thức chuẩn bị

Trong mục này, tác giả nhắc lại một số khái niệm quan trọng của không gian b -metric mạnh, cần thiết cho kết quả nghiên cứu.

Định nghĩa 2.1. [6] Gọi M là một tập không rỗng và $K \geq 1$ là một số thực. Ánh xạ $\Omega: M \times M \rightarrow \mathbb{R}_+$ được gọi là một b -metric mạnh trên M nếu các điều kiện sau được thỏa mãn:

- 1) $\Omega(\varsigma, \nu) = 0$ nếu và chỉ nếu $\varsigma = \nu$;
- 2) $\Omega(\varsigma, \nu) = \Omega(\nu, \varsigma)$ với mọi $\varsigma, \nu \in M$;
- 3) $\Omega(\varsigma, \nu) \leq K\Omega(\varsigma, \psi) + \Omega(\psi, \nu)$ với mọi $\varsigma, \nu, \psi \in M$.

Khi đó, bộ ba (M, Ω, K) được gọi là không gian b -metric mạnh.

Định nghĩa 2.2. [6] Cho (M, Ω, K) là một không gian b -metric mạnh, $\{\varsigma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ là một dãy trong M và $\varsigma \in M$. Khi đó:

- 1) Dãy $\{\varsigma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ được gọi là hội tụ đến ς nếu $\lim_{n \rightarrow \infty} \Omega(\varsigma_n, \varsigma) = 0$. Kí hiệu là $\lim_{n \rightarrow \infty} \varsigma_n = \varsigma$.
- 2) Dãy $\{\varsigma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ được gọi là dãy Cauchy trong M nếu $\lim_{n, m \rightarrow \infty} \Omega(\varsigma_n, \varsigma_m) = 0$.
- 3) Không gian b -metric mạnh (M, Ω, K) được gọi là không gian b -metric mạnh đầy đủ nếu mọi dãy Cauchy trong M là hội tụ.

2.2. Kết quả chính

Tác giả bắt đầu kết quả bằng việc đưa ra định nghĩa ánh xạ co kiểu Kannan nội suy trên không gian b -metric mạnh như sau.

Định nghĩa 2.3. Cho (M, Ω, K) là một không gian b -metric mạnh. Ta nói rằng ánh xạ $T: M \rightarrow M$ là một ánh xạ co kiểu Kannan nội suy nếu tồn tại các hằng số $\eta \in [0, 1)$ và $\alpha \in (0, 1)$ thỏa mãn điều kiện:

$$\Omega(T\varsigma, T\nu) \leq \eta [\Omega(\varsigma, T\varsigma)]^\alpha \cdot [\Omega(T\nu, \nu)]^{1-\alpha} \quad (2)$$

với mọi $\varsigma, \nu \in M$ và $\varsigma \neq T\varsigma, \nu \neq T\nu$.

Định lý 2.4. Cho (M, Ω, K) là một không gian b -metric mạnh đầy đủ và T là một ánh xạ co

kiểu Kannan nội suy. Khi đó T có điểm bất động trong M .

Chứng minh

Giả sử $\varsigma_0 \in M$. Ta xây dựng một dãy $\{\varsigma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ theo quy tắc $\varsigma_{n+1} = T\varsigma_n$ với mọi $n \geq 0$. Không mất tính tổng quát, giả sử rằng $\varsigma_n \neq \varsigma_{n+1}$ với mỗi $n \geq 0$. Thật vậy, nếu tồn tại một số tự nhiên n_0 sao cho $\varsigma_{n_0} = \varsigma_{n_0+1} = T\varsigma_{n_0}$ thì ς_{n_0} là một điểm bất động của T . Do đó, ta có

$$\Omega(\varsigma_n, T\varsigma_n) = \Omega(\varsigma_n, \varsigma_{n+1}) > 0,$$

với mỗi $n \geq 0$. Theo giả thiết ta có

$$\begin{aligned} \Omega(\varsigma_{n+1}, \varsigma_n) &= \Omega(T\varsigma_n, T\varsigma_{n-1}) \\ &\leq \eta [\Omega(\varsigma_n, T\varsigma_n)]^\alpha \cdot [\Omega(\varsigma_{n-1}, T\varsigma_{n-1})]^{1-\alpha} \\ &= \eta [\Omega(\varsigma_{n-1}, \varsigma_n)]^{1-\alpha} \cdot [\Omega(\varsigma_n, \varsigma_{n+1})]^\alpha, \end{aligned}$$

suy ra

$$[\Omega(\varsigma_n, \varsigma_{n+1})]^{1-\alpha} \leq \eta [\Omega(\varsigma_{n-1}, \varsigma_n)]^{1-\alpha}, \quad (3)$$

với mọi $n \geq 1$. Điều này chứng tỏ $\{\Omega(\varsigma_{n-1}, \varsigma_n)\}$ là một dãy giảm các số không âm và hội tụ. Kết quả là tồn tại hằng số dương τ sao cho

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Omega(\varsigma_{n-1}, \varsigma_n) = \tau.$$

Ta sẽ chứng minh rằng $\tau = 0$. Thật vậy, từ (3) và vì $\Omega(\varsigma_n, \varsigma_{n+1}) > 0$ với mỗi $n \geq 1$, tồn tại $\eta \in [0, 1)$ sao cho

$$\Omega(\varsigma_n, \varsigma_{n+1}) \leq \eta \Omega(\varsigma_{n-1}, \varsigma_n) \leq \eta^n \Omega(\varsigma_0, \varsigma_1) \quad (4)$$

Lấy giới hạn khi $n \rightarrow \infty$ ta được $\tau = 0$. Do đó,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Omega(\varsigma_{n-1}, \varsigma_n) = 0.$$

Bước tiếp theo, ta sẽ chứng minh rằng $\{\varsigma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ là một dãy Cauchy trong M . Áp dụng bất đẳng thức tam giác và các bất đẳng thức trong (4) với $m > n$, ta có

$$\begin{aligned}
\Omega(\varsigma_n, \varsigma_m) &\leq K\Omega(\varsigma_n, \varsigma_{n+1}) + K\Omega(\varsigma_{n+1}, \varsigma_{n+2}) + \dots \\
&\quad + K\Omega(\varsigma_{m-2}, \varsigma_{m-1}) + \Omega(\varsigma_{m-1}, \varsigma_m) \\
&\leq K\eta^n \Omega(\varsigma_0, \varsigma_1) + K\eta^{n+1} \Omega(\varsigma_0, \varsigma_1) + \dots \\
&\quad + K\eta^{m-2} \Omega(\varsigma_0, \varsigma_1) + \eta^{m-1} \Omega(\varsigma_0, \varsigma_1) \\
&\leq \frac{\eta^n}{1-\eta} K\Omega(\varsigma_0, \varsigma_1) + \eta^{m-1} \Omega(\varsigma_0, \varsigma_1) \rightarrow 0,
\end{aligned}$$

khi $m, n \rightarrow \infty$. Điều đó chứng tỏ $\{\varsigma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ là một dãy Cauchy trong M . Vì M là một không gian b -metric mạnh đầy đủ nên tồn tại $\varsigma^* \in M$ sao cho $\lim_{n \rightarrow \infty} \Omega(\varsigma_n, \varsigma^*) = 0$.

Cuối cùng, ta chỉ ra rằng $\varsigma^* \in M$ là một điểm bất động của T . Thật vậy, theo giả thiết ta có

$$\begin{aligned}
\Omega(\varsigma^*, T\varsigma^*) &\leq \Omega(T\varsigma_n, T\varsigma^*) + K\Omega(T\varsigma_n, \varsigma^*) \\
&\leq \eta [\Omega(\varsigma_n, T\varsigma_n)]^\alpha \cdot [\Omega(\varsigma^*, T\varsigma^*)]^{1-\alpha} + K\Omega(\varsigma_{n+1}, \varsigma^*).
\end{aligned} \tag{5}$$

Lấy giới hạn khi $n \rightarrow \infty$ trong bất đẳng thức (5), ta thu được $\Omega(\varsigma^*, T\varsigma^*) = 0$. Điều này chứng tỏ $T\varsigma^* = \varsigma^*$. Vì vậy, $\varsigma^* \in M$ là một điểm bất động của T .

Nhận xét 2.5. Chú ý rằng, điều kiện của ánh xạ co kiểu Kannan nội suy trong Định lý 2.4 của bài báo, hằng số $\eta \in (0,1)$ trong khi đó ở Định lý 1.1 của Kannan nó bị giới hạn bởi $\frac{1}{2}$.

Hơn thế, ví dụ sau đây cho thấy Định lý 2.4 là áp dụng được, nhưng Định lý 1.1 thì không.

Ví dụ 2.6. Lấy $M = \{1, 2, 3\}$ và định nghĩa một b -metric mạnh $\Omega: M \times M \rightarrow \mathbb{R}_+$ như sau:

$$\begin{aligned}
\Omega(\varsigma, \varsigma) &= 0, \quad \forall \varsigma \in M; \quad \Omega(1, 2) = \Omega(2, 1) = \frac{1}{2}; \\
\Omega(1, 3) &= \Omega(3, 1) = 5; \quad \Omega(2, 3) = \Omega(3, 2) = 4.
\end{aligned}$$

Xét ánh xạ $T: M \rightarrow M$ được định nghĩa bởi $T1=1, T2=1, T3=2$. Dễ thấy, $(M, \Omega, 3)$ là một không gian b -metric mạnh đầy đủ nhưng không là không gian metric vì

$$5 = \Omega(3, 1) > \Omega(3, 2) + \Omega(2, 1) = \frac{9}{2}.$$

Do đó, Định lý 1.1 không áp dụng được. Mặt khác, với mọi $\varsigma, \nu \in M \setminus \{1\}$ và $\eta = \frac{1}{2}, \alpha = \frac{1}{8}$, khi đó ánh xạ T thỏa mãn các điều kiện của Định lý 2.4 và T có một điểm bất động $\varsigma^* = 1$.

3. KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

Bài báo này nghiên cứu về một loại ánh xạ co mới, đó là ánh xạ co kiểu Kannan nội suy trên không gian b -metric mạnh đầy đủ. Kết quả chính của bài báo là một mở rộng Định lý 1.1. Hơn nữa, Ví dụ 2.6 chứng tỏ rằng mở rộng đó là một mở rộng thực sự. Trong tương lai, tác giả đề xuất các hướng nghiên cứu sâu hơn cho các kết quả này trong không gian b -metric mạnh không đầy đủ và các ứng dụng của chúng vào sự tồn tại nghiệm của các phương trình vi phân.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Cho Y. J. (2017). Survey on metric fixed point theory and applications, *In M. Ruzhansky et al. (eds.) Advances in Real and Complex Analysis with Applications, Trends in Math*, Springer Singapore, pp. 183-241.
2. Kannan R. (1968). Some results on fixed points, *Bull. Calcutta Math. Soc.*, Vol. 60, pp. 71-76.
3. Kannan R. (1969). Some results on fixed points-II, *Amer. Math. Monthly.*, Vol. 76, pp. 405-408.
4. Subrahmanyam V. (1975). Completeness and fixed-points, *Monatsh. Math.*, Vol. 80(4), pp. 325-330.
5. E. H. Connell E. H. (1959). Properties of fixed point spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.*, Vol. 10, pp. 974-979.

6. Kirk W. and Shahzad N. (2014). Fixed point theory in distance spaces, Springer, 2014.
7. Górnicki J. (2018) Various extensions of Kannan's fixed point theorem, *J. Fixed Point Theory Appl.*, Vol. 21, pp. 1-11.
8. Gulyaz-Ozyurt S. (2019). A note on Kannan type mappings with a F -contractive iterate, *Results in Nonlinear Anal.*, Vol. 2, No. 3, 143-146.
9. Afrah A., Abdou N. (2020). Fixed points of Kannan maps in modular metric spaces, *AIMS Mathematics*, Vol. 5(6), pp. 6395-6403.
10. Hieu D. T., Ha T. V., Linh H. V. (2020). Fixed point theorems for Kannan type mappings in cone metric spaces, *TNU Journal of Science and Technology*, Vol. 225, No. 6: Natural Sciences - Engineering - Technology, pp. 298-302, 2020.
11. Hieu D. (2021). A new type of Kannan's fixed point theorem in strong b -metric spaces, *AIMS Mathematics*, Vol. 6(7), pp. 7895-7908.

Thông tin của tác giả:**TS. Đoàn Trọng Hiếu**

Trường Đại học Hạ Long

Điện thoại: +(84).912.548.009 - Email: doantronghieu@daihochalong.edu.vn

INTERPOLATIVE KANNAN-TYPE CONTRACTIONS IN STRONG b-METRIC SPACES

Information about authors:**Doan Trong Hieu**, Ph.D., Ha Long University, email: doantronghieu@daihochalong.edu.vn**ABSTRACT:**

It can be said that fixed-point theory originated from the research of Brouwer in 1912 and Banach in 1922. Among these, Banach's Fixed Point Theorem plays a central role in this theory, providing a sufficient condition for a mapping from a complete metric space into itself to have a unique fixed point. Banach's Fixed Point Theorem is also an important tool for studying the existence of solutions to differential equations, systems of linear equations, integral equations, and various other applications. In this paper, we improve Banach's Fixed Point Theorem from an interpolation perspective in strong b -metric spaces. By using the concept of interpolation, we propose a new type of contraction mapping on extended metric spaces. The results obtained in the paper are generalizations of Kannan's results. Additionally, an example is provided to illustrate the theoretical results.

Keywords: Fixed point, strong b -metric, strong b -metric space, Kannan-type contraction mapping interpolation.

REFERENCES

1. Cho Y. J. (2017). Survey on metric fixed point theory and applications, *In M. Ruzhansky et al. (eds.) Advances in Real and Complex Analysis with Applications, Trends in Math*, Springer Singapore, pp. 183-241.
2. Kannan R. (1968). Some results on fixed points, *Bull. Calcutta Math. Soc.*, Vol. 60, pp. 71-76.
3. Kannan R. (1969). Some results on fixed points-II, *Amer. Math. Monthly.*, Vol. 76, pp. 405-408.

4. Subrahmanyam V. (1975). Completeness and fixed-points, *Monatsh. Math.*, Vol. 80(4), pp. 325-330.
5. E. H. Connell E. H. (1959). Properties of fixed point spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.*, Vol. 10, pp. 974-979.
6. Kirk W. and Shahzad N. (2014). Fixed point theory in distance spaces, Springer, 2014.
7. Górnicki J. (2018) Various extensions of Kannan's fixed point theorem, *J. Fixed Point Theory Appl.*, Vol. 21, pp. 1-11.
8. Gulyaz-Ozyurt S. (2019). A note on Kannan type mappings with a F -contractive iterate, *Results in Nonlinear Anal.*, Vol. 2, No. 3, 143-146.
9. Afrah A., Abdou N. (2020). Fixed points of Kannan maps in modular metric spaces, *AIMS Mathematics*, Vol. 5(6), pp. 6395-6403.
10. Hieu D. T., Ha T. V., Linh H. V. (2020). Fixed point theorems for Kannan type mappings in cone metric spaces, *TNU Journal of Science and Technology*, Vol. 225, No. 6: Natural Sciences - Engineering - Technology, pp. 298-302, 2020.
11. Hieu D. (2021). A new type of Kannan's fixed point theorem in strong b -metric spaces, *AIMS Mathematics*, Vol. 6(7), pp. 7895-7908.

Ngày nhận bài: 09/06/2025;

Ngày nhận bài sửa: 16/06/2025;

Ngày chấp nhận đăng: 20/06/2025.