

MỘT VÀI VÍ DỤ ỨNG DỤNG DẠNG TOÀN PHƯƠNG ĐỂ TÌM CỰC TRỊ CÓ ĐIỀU KIỆN CỦA HÀM SỐ NHIỀU BIẾN SỐ

Lê Thanh Tuyền^{1,*}

¹Trường Đại học Công nghiệp Quảng Ninh

*Email: halongxanh82@gmail.com

TÓM TẮT

Trong bài báo này, chúng tôi trình bày các nội dung chính sau. Các khái niệm cơ bản về dạng toàn phương. Bao gồm: định nghĩa dạng toàn phương, dạng toàn phương xác định dương, dạng toàn phương xác định âm, dạng toàn phương không xác định dấu và dạng toàn phương chính tắc. Các khái niệm liên quan đến cực trị của hàm nhiều biến, như: cực đại, cực tiểu trên một miền, cực trị có điều kiện, cùng với các điều kiện cần và đủ để xác định cực trị. Một số ví dụ minh họa cụ thể, cho thấy cách áp dụng dạng toàn phương trong việc tìm cực trị có điều kiện của hàm nhiều biến số.

Từ khóa: Hàm số nhiều biến số, cực đại, cực tiểu, cực trị, cực trị có điều kiện, dạng toàn phương, dạng toàn phương chính tắc

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Trong quá trình giảng dạy các học phần Toán cao cấp tại Trường Đại học Công nghiệp Quảng Ninh, sinh viên đã được làm quen với các bài toán tìm cực trị của hàm số nhiều biến. Tuy nhiên, nội dung giảng dạy chủ yếu tập trung vào các bài toán tìm cực trị tự do, trong khi các bài toán cực trị có điều kiện thường được giao cho sinh viên tự nghiên cứu. Điều này gây không ít khó khăn trong quá trình học tập, đặc biệt khi sinh viên tiếp cận các môn chuyên ngành yêu cầu kiến thức về tối ưu hóa. Chẳng hạn, trong bối cảnh thị trường có n mặt hàng với giá tương ứng, hàm lợi ích biểu diễn mức độ hài lòng của người tiêu dùng là một hàm nhiều biến số. Nếu người tiêu dùng có ngân sách M , vấn đề đặt ra là: lựa chọn số lượng từng mặt hàng như thế nào để tối đa hóa lợi ích cá nhân. Đây là một ví dụ điển hình cho bài toán tìm cực trị có điều kiện trong thực tiễn. Nhằm giúp sinh viên hiểu và vận dụng được công cụ toán học để giải quyết các bài toán dạng này, bài báo giới thiệu phương pháp sử dụng dạng toàn phương trong việc xác định cực trị có điều kiện của hàm nhiều biến, thông qua các ví dụ minh họa cụ thể.

2. NỘI DUNG NGHIÊN CỨU

2.1. Tóm tắt lý thuyết

2.1.1. Dạng toàn phương

Dạng toàn phương của n biến $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ là biểu thức có dạng

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j \quad (1)$$

Biểu thức (1) gọi là dạng toàn phương xác định dương nếu nó luôn nhận giá trị dương với mọi bộ số thực $x_1, x_2, \dots, x_n$ không đồng thời bằng 0.

Biểu thức (1) gọi là dạng toàn phương xác định âm nếu nó luôn nhận giá trị âm với mọi bộ số thực $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ không đồng thời bằng 0.

Một dạng toàn phương nhận cả giá trị âm và giá trị dương gọi là dạng toàn phương không xác định (không xác định dấu) [3, tr272].

Dạng toàn phương chính tắc là dạng toàn phương có dạng

$$f = a_1 y_1^2 + a_2 y_2^2 + \dots + a_n y_n^2 \quad (2)$$

Định lý 1. Một dạng toàn phương n biến số là dạng toàn phương xác định dương khi và chỉ khi n hệ số trong dạng chính tắc (2) đều là các số dương [5, tr273].

Định lý 2. Một dạng toàn phương n biến số là dạng toàn phương xác định âm khi và chỉ khi n hệ số trong dạng chính tắc (2) đều là các số âm.

Ngoài ra, một dạng toàn phương không xác định dấu khi và chỉ khi trong các hệ số ở dạng chính tắc có cả hệ số dương và hệ số âm.

2.1.2. Định nghĩa cực trị.

Cho hàm số $u = f(x, y)$ xác định trên miền D , $M_0(x_0, y_0)$ là một điểm trong của D . Gọi V là một lân cận nào đó của điểm M_0 , ta nói:

Hàm $u = f(x, y)$ đạt cực đại tại M_0 nếu với mọi $M \in V$ thì, $f(M) - f(M_0) < 0$, giá trị $f(M_0)$ gọi là giá trị cực đại.

Hàm $u = f(x, y)$ đạt cực tiểu tại M_0 nếu với mọi $M \in V$ thì, $f(M) - f(M_0) > 0$, giá trị $f(M_0)$ gọi là giá trị cực tiểu.

Cực đại, cực tiểu gọi chung là cực trị.

Người ta gọi cực trị của hàm $u = f(x, y)$, trong đó các biến số x và y thỏa mãn hệ thức $g(x, y) = 0$ là cực trị có điều kiện. [4, tr25].

Định nghĩa tương tự với hàm n biến.

2.1.3. Điều kiện cần của cực trị.

Nếu hàm số $u = f(x, y)$ đạt cực trị tại điểm $M_0(x_0, y_0)$ mà tại đó các đạo hàm riêng tồn tại thì chúng bằng không tại điểm đó [4, tr26].

2.1.4. Điều kiện đủ của cực trị.

Giả sử $M_0(x_0, y_0)$ là một điểm dừng của hàm số $u = f(x, y)$, hàm $f(x, y)$ có các đạo hàm riêng cấp hai tại lân cận của M_0 ; các đạo hàm riêng ấy liên tục trong lân cận của M_0 và $d^2 f(M_0) \neq 0$. Khi đó:

Nếu $d^2 f(M_0) > 0$ thì hàm số đạt cực tiểu tại M_0 .

Nếu $d^2 f(M_0) < 0$ thì hàm số đạt cực đại tại M_0 .

2.2. Các ví dụ.

Ví dụ 1. Tìm cực trị của hàm số $z = x^2 + y^2$ thỏa mãn điều kiện $x + y = 1$.

Giải:

Lập hàm Lagrange

$$\begin{aligned} L(x, y, \lambda) &= f(x, y) + \lambda g(x, y) \\ &= x^2 + y^2 + \lambda(x + y - 1) \\ g(x, y) &= x + y - 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Xét } \begin{cases} L'_x = 2x + \lambda = 0 \\ L'_y = 2y + \lambda = 0 \\ L'_\lambda = x + y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\lambda}{2} \\ y = -\frac{\lambda}{2} \\ x + y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \\ \lambda = -1 \end{cases}$$

Hàm số có 1 điểm dừng $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1\right)$

$$L''_{xx} = 2, L''_{xy} = 0, L''_{yy} = 2 \Rightarrow d^2 L = 2dx^2 + 2dy^2$$

Tại điểm $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1\right) \Rightarrow d^2 L = 2dx^2 + 2dy^2$, đây là dạng toàn phương xác định dương. Vậy hàm số đạt cực tiểu tại điểm $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $z_{CT} = \frac{1}{2}$ thỏa mãn điều kiện $x + y = 1$.

Ví dụ 2. Tìm cực trị của hàm số $z = x + 2y$ thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 = 5$.

Giải:

Lập hàm Lagrange

$$\begin{aligned} L(x, y, \lambda) &= f(x, y) + \lambda g(x, y) \\ &= x + 2y + \lambda(x^2 + y^2 - 5) \\ g(x, y) &= x^2 + y^2 - 5 = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Xét } \begin{cases} L'_x = 1 + 2x\lambda = 0 \\ L'_y = 2 + 2y\lambda = 0 \\ L'_\lambda = x^2 + y^2 - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2\lambda} \\ y = -\frac{1}{\lambda} \\ x^2 + y^2 - 5 = 0 \end{cases}$$

Hàm số có 2 điểm dừng $\left(-1, -2, \frac{1}{2}\right), \left(1, 2, -\frac{1}{2}\right)$

$$L''_{xx} = 2\lambda, L''_{xy} = 0, L''_{yy} = 2\lambda \Rightarrow d^2 L = 2\lambda dx^2 + 2\lambda dy^2$$

+) Tại điểm $\left(-1, -2, \frac{1}{2}\right) \Rightarrow d^2 L = dx^2 + dy^2$, đây là dạng toàn phương xác định dương. Vậy hàm số đạt cực tiểu tại điểm $(-1, -2)$, $z_{CT} = -5$ thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 = 5$.

+) Tại điểm $\left(1, 2, -\frac{1}{2}\right) \Rightarrow d^2L = -dx^2 - dy^2$, đây là dạng toàn phương xác định âm. Vậy hàm số đạt cực đại tại điểm $(1, 2)$, $z_{CD} = 5$ thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 = 5$

Ví dụ 3. Tìm cực trị của hàm số $u = x + y + z$ thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$

Giải:

Lập hàm Lagrange

$$L(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z) \\ = x + y + z + \lambda \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - 1 \right)$$

$$\text{Xét } \begin{cases} L'_x = 1 - \frac{\lambda}{x^2} = 0 \\ L'_y = 1 - \frac{\lambda}{y^2} = 0 \\ L'_z = 1 - \frac{\lambda}{z^2} = 0 \\ L'_\lambda = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \lambda \\ y^2 = \lambda \\ z^2 = \lambda \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - 1 = 0 \end{cases}$$

Vậy hàm số có 4 điểm dừng: $M(3, 3, 3, 9)$, $N(-1, 1, 1, 1)$, $P(1, -1, 1, 1)$, $Q(1, 1, -1, 1)$

$$L''_{x^2} = \frac{2\lambda}{x^3}, L''_{y^2} = \frac{2\lambda}{y^3}, L''_{z^2} = \frac{2\lambda}{z^3}, L''_{xy} = L''_{xz} = L''_{yz} = 0 \\ \Rightarrow d^2L = \frac{2\lambda}{x^3}dx^2 + \frac{2\lambda}{y^3}dy^2 + \frac{2\lambda}{z^3}dz^2$$

+) Tại điểm $M(3, 3, 3, 9)$

$\Rightarrow d^2L = \frac{2}{3}dx^2 + \frac{2}{3}dy^2 + \frac{2}{3}dz^2$, đây là dạng toàn phương xác định dương. Vậy hàm số đạt cực tiểu tại điểm $(3, 3, 3)$, $u_{CT} = 9$ thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$.

+) Tại điểm $N(-1, 1, 1, 1)$

$\Rightarrow d^2L = -2dx^2 + 2dy^2 + 2dz^2$, đây là dạng toàn phương không xác định dấu. Vậy hàm số không đạt cực trị tại điểm $(-1, 1, 1)$.

+) Tại điểm $P(1, -1, 1, 1)$

$\Rightarrow d^2L = 2dx^2 - 2dy^2 + 2dz^2$, đây là dạng toàn phương không xác định dấu. Vậy hàm số không đạt cực trị tại điểm $(1, -1, 1)$.

+) Tại điểm $Q(1, 1, -1, 1)$

$\Rightarrow d^2L = 2dx^2 + 2dy^2 - 2dz^2$, đây là dạng toàn phương không xác định dấu. Vậy hàm số không đạt cực trị tại điểm $(1, 1, -1)$.

Ví dụ 4. Xét thị trường gồm hai mặt hàng (x, y) với giá tương ứng là (p, q) . Giả sử, sở thích của người tiêu dùng được phản ánh thông qua hàm lợi ích tiêu dùng:

$$f(x, y) = -3x^2 - 2y^2 + 2025.$$

Cho biết giá của các mặt hàng tương ứng là $p = 6(\$)$; $q = 4(\$)$, và thu nhập dành cho tiêu dùng là 2030(\$). Hãy xác định lượng cầu đối với mỗi mặt hàng nếu người tiêu dùng tối đa hoá lợi ích của mình

Giải:

Bản chất của bài toán này là người tiêu dùng có 2030(\$) cần mua bao nhiêu mặt hàng x và bao nhiêu mặt hàng y sao cho lợi ích là lớn nhất? Hay nói một cách toán học là: Tìm (x, y) sao cho hàm lợi ích

$$f(x, y) = -3x^2 - 2y^2 + 2025$$

là lớn nhất với điều kiện $6x + 4y = 2030$

Ta có hàm Lagrange là:

$$L = -3x^2 - 2y^2 + 2025 + \lambda(6x + 4y - 2030)$$

Với $g(x, y) = 6x + 4y - 2030 = 0$

$$\text{Xét } \begin{cases} L'_x = -6x + 6\lambda = 0 \\ L'_y = -4y + 4\lambda = 0 \\ L'_\lambda = 6x + 4y - 2030 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 203 \\ y = 203 \\ \lambda = 203 \end{cases}$$

Khi đó ta có. Tại điểm $(203, 203)$, với $\lambda = 203$ thì

$$L''_{x^2} = -6, L''_{y^2} = -4, L''_{xy} = 0 \\ \Rightarrow d^2L = -6dx^2 - 4dy^2.$$

Đây là dạng toàn phương xác định âm cho nên hàm lợi ích đạt cực đại tại $(203, 203)$.

Như vậy người tiêu dùng với số tiền 2030(\$) thì nên mua 203 sản phẩm x và 203 sản phẩm y thì có lợi nhất.

3. KẾT LUẬN

Xuất phát từ những khó khăn mà sinh viên thường gặp phải trong quá trình học tập và nghiên cứu, đặc biệt là khi tiếp cận các bài toán tìm cực trị có điều kiện của hàm nhiều biến. Bài báo này đã tổng hợp lại một số phương pháp sử dụng dạng toàn phương như một công cụ hiệu

quả để giải quyết vấn đề trên. Các ví dụ cụ thể đề xuất trong bài báo đã minh họa được quy trình áp dụng lý thuyết vào thực hành. Hơn thế, Ví dụ 4 cho thấy kết quả thu được có thể vận dụng để giải quyết một bài toán thực tiễn trong kinh tế học. Đây là phương pháp có tính hệ thống, ngắn gọn, dễ hiểu và phù hợp để hỗ trợ sinh viên trong học tập cũng như nghiên cứu các bài toán tối ưu có ràng buộc sau này.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Chúc Hoàng Nguyên (Chủ biên), 2015. Giáo Trình Toán cao cấp 1, NXB Đại học sư phạm.
2. Nguyễn Đình Trí (Chủ biên), 2006. Toán cao cấp tập 1, NXB Giáo dục.
<https://huynhcam.wordpress.com/wp-content/uploads/2015/08/toan-cao-cap-tap-1.pdf>
3. Nguyễn Đình Trí (Chủ biên), 2006. Toán cao cấp tập 2, NXB Giáo dục.
<https://huynhcam.wordpress.com/wp-content/uploads/2015/08/toan-cao-cap-tap-2.pdf>
4. Nguyễn Đình Trí (Chủ biên), 2006. Toán cao cấp tập 3, NXB Giáo dục.
<https://huynhcam.wordpress.com/wp-content/uploads/2015/08/toancao-cap-tap-3.pdf>
5. Lê Đình Thúc (Chủ biên), 2012. Toán cao cấp cho các nhà kinh tế, NXB Đại học kinh tế Quốc dân.
<https://mathlemin.wordpress.com/wp-content/uploads/2021/08/toan-cao-cap-2-le-dinh-thuy-ilovepdf-compressed.pdf>
6. Nguyễn Quốc Hưng, 2009, Toán cao cấp và một số ứng dụng trong kinh doanh, Nxb Đại học Quốc gia thành phố Hồ Chí Minh.

Thông tin của tác giả:

ThS. Lê Thanh Tuyền

Giảng viên Bộ môn Toán, Trường Đại học Công nghiệp Quảng Ninh

Điện thoại: +(84)989844610- Email: Halongxanh82@gmail.com

SOME EXAMPLES OF APPLYING QUADRATIC FORMS TO FIND CONSTRAINED EXTREMA OF FUNCTIONS OF SEVERAL VARIABLES

Information about authors:

ThS. Le Thanh Tuyen

Lecturer of Mathematics at Quang Ninh University of Industryemail:

Phone +(84)989844610- Email: Halongxanh82@gmail.com

ABSTRACT:

In this paper, we present three main contents, including. Basic concepts of quadratic forms, including: definition of quadratic forms, positive definite forms, negative definite forms, indefinite forms, and canonical quadratic forms. Concepts related to extrema of multivariable functions, such as: maximum, minimum on the domain, conditional extrema, along with necessary and sufficient conditions to determine extrema. Some specific illustrative examples, showing how to apply quadratic forms in finding conditional extrema of multivariable functions

Keywords: *Functions of several variables, local maxima, local minima, extrema, constrained extrema, quadratic forms, and canonical forms of quadratic forms.*

REFERENCES

1. Chuc Hoang Nguyen (Editor-in-Chief), 2015. Advanced Mathematics Textbook 1, Pedagogical University Publishing House.
2. Nguyen Dinh Tri (Editor-in-Chief), 2006. Advanced Mathematics, Volume 1, Education Publishing House. <https://huynhcam.wordpress.com/wp-content/uploads/2015/08/toan-cao-cap-tap-1.pdf>
3. Nguyen Dinh Tri (Editor-in-Chief), 2006. Advanced Mathematics, Volume 2, Education Publishing House. <https://huynhcam.wordpress.com/wp-content/uploads/2015/08/toan-cao-cap-tap-2.pdf>
4. Nguyen Dinh Tri (Editor-in-Chief), 2006. Advanced Mathematics, Volume 3, Education Publishing House. <https://huynhcam.wordpress.com/wp-content/uploads/2015/08/toancao-cap-tap-3.pdf>
5. Le Dinh Thuy (Editor-in-Chief), 2012. Advanced Mathematics for Economists, National Economics University Publishing House. <https://mathlemin.wordpress.com/wp-content/uploads/2021/08/toan-cao-cap-2-le-dinh-thuy-ilovepdf-compressed.pdf>
6. Nguyen Quoc Hung, 2009, Advanced Mathematics and some applications in business, Ho Chi Minh City National University Publishing House.

Ngày nhận bài: 06/06/2025;

Ngày nhận bài sửa: 12/06/2025;

Ngày chấp nhận đăng: 18/06/2025.