PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH SAI PHÂN TUYẾN TÍNH HỆ SỐ HẰNG

Nguyễn Thanh Huyền[1,*]
[1]*Trường Đại học Công nghiệp Quảng Ninh*
[*]Email: nguyenthanhhuyen@qui.edu.vn

TÓM TẮT

Trong bài viết, tác giả trình bày phương pháp giải phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng. Bao gồm: lý thuyết về nghiệm của phương trình sai phân tuyến tính, phương pháp giải phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng. Các kết quả trên có được do tác giả thu thập, chọn lọc tài liệu từ các nguồn như giáo trình, luận văn thạc sĩ, các bài viết, giúp người đọc có cái nhìn tổng quan về phương pháp giải phương trình.

Từ khóa: Công *thức, dãy số, lãi suất, sai phân, tuyến tính.*

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Nếu như phương trình vi phân đã thể hiện thế mạnh của nó trong việc giải quyết các mô hình toán học với biến liên tục, thì trong mô hình toán học với các biến rời rạc, người ta sử dụng lý thuyết phương trình sai phân để giải quyết. Tuy nhiên, người đọc ít được tiếp cận các kiến thức về phương trình sai phân. Giáo trình viết về phương trình sai phân không nhiều. Kiến thức về phương trình sai phân chủ yếu được trình bày sâu trong các luận văn thạc sĩ, hoặc được trình bày đơn giản qua một số bài báo viết về giải phương trình vi phân, nhưng lời giải là kết quả của việc sử dụng hệ quả của kiến thức gốc, hoặc đôi khi lời giải khá phức tạp, làm người đọc khó hình dung, vận dụng và khó hình thành sự hiểu biết đầy đủ về phương pháp giải phương trình vi phân. Trong bài báo, tác giả trình bày tổng hợp phương pháp giải phương trình sai phân, giúp người đọc có cái nhìn khái quát hơn về các kết quả đã nghiên cứu về phương trình sai phân. Từ đó, có thể giải các bài toán về phương trình sai phân dễ dàng hơn, dựa vào công thức và các phương pháp đã biết.

2. PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

2.1. Khái niệm phương trình sai phân

2.1.1. Định nghĩa phương trình sai phân .

Xét hàm số biến số thực $x(t)$ và $h > 0$.

Phương trình

$F\big(t, x(t), x(t+h), \dots, x(t+nh)\big) = 0$ (1)

gọi là phương trình sai phân cấp n.

2.1.2.Nghiệm của phương trình sai phân.

Một hàm liên tục $x(t)$ được gọi là nghiệm của phương trình (1) trên tập X nếu thay nó vào phương trình (1) thì ta được được đẳng thức đúng trên X. [5, tr.7]

Trong bài viết, ta luôn giả sử $h = 1$, khi đó phương trình sai phân có dạng

$$F\big(t, x(t), x(t+1), \dots, x(t+n)\big) = 0$$

Tương tự phương trình vi phân, phương trình sai phân cũng được có khái niệm điều kiện đầu và bài toán Cosi về tính tồn tại và duy nhất nghiệm.

Phương trình sai phân được chia làm hai loại phương trình sai phân: phương trình sai phân tuyến tính và phi tuyến. Bài viết này chỉ đề cập đến khái niệm phương trình sai phân tuyến tính.

2.1.2. Định nghĩa phương trình sai phân tuyến tính

Xét phương trình: $L\big(x(t)\big) = x(t+n) + p_1(t)x(t+n-1) + p_2(t)x(t+n-2) + \dots + p_n(t)x(n) = f(t)$.

Nếu $f(t) \equiv 0$, ta có phương trình sai phân tuyến tính thuần nhất

$x(t+n) + p_1(t)x(t+n-1) + p_2(t)x(t+n-2) + \dots + p_n(t)x(n) = 0$ (2)

Nếu $f(t) \not\equiv 0$, ta có phương trình sai phân tuyến tính không thuần nhất cấp n, ta kí hiệu là (3).

Ta gọi (2) là phương trình sai phân tuyến tính thuần nhất của (3).

2.2. Phương trình sai phân tuyến tính thuần nhất

2.2.1. Khái niệm hệ nghiệm cơ bản

Các hàm $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$ được gọi là độc lập tuyến tính trên tập X nếu từ đẳng thức

$C_1\varphi_1(t) + C_2\varphi_2(t) + \cdots C_n\varphi_n(t) = 0, t\epsilon X$

ta được $C_1 = C_2 = \cdots = C_n = 0$ [5, tr.14]

Hệ (2) không thể có nhiều hơn n nghiệm độc lập tuyến tính.

Định nghĩa 1. Bất kì n nghiệm độc lập tuyến tính của (2) được gọi là hệ nghiệm cơ bản.

Định lý 1: Tồn tại hệ nghiệm cơ bản của (2).

Định lý 2. Nếu $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$ là hệ nghiệm cơ bản của (2) thì nghiệm tổng quát của (2) có thể viết dưới dạng

$x(t) = C_1\varphi_1(t) + C_2 2\varphi_2(t) + \cdots C_n\varphi_n(t)$

với C_i là các hằng số tuỳ ý. [1]

2.2.2. Phương trình sai phân tuyến tính thuần nhất với hệ số hằng

2.2.2.1. Định nghĩa

Phương trình có dạng

$x(t+n) + p_1x(t+n-1) + p_2x(t+n-2) + + \cdots + p_nx(t)$=0 với $p_i \in R, i = 1, \dots, n, p_n \neq 0$

(4) gọi là phương trình sai phân tuyến tính thuần nhất với hệ số hằng.

2.2.2.2. Bổ đề

Nếu hàm phức $u(t) + iv(t)$ là nghiệm phức của phương trình (4) thì $u(t), v(t)$ cũng là nghiệm của (4). Phần thực, phần ảo của các nghiệm phức của (4) tạo thành các hàm là các nghiệm độc lập tuyến tính của (4).

2.2.2.3. Cách giải

Giải phương trình $k^n + p_1k^{n-1} + \cdots + p_n = 0$ (5)

Phương trình này gọi là phương trình đặc trưng của (4). Nghiệm của phương trình (5) gọi là nghiệm đặc trưng.

1) Nếu (5) có n nghiệm đặc trưng phân biệt, phương trình (4) có n nghiệm cơ bản $k_1{}^t$, $k_2{}^t, \dots, k_2{}^t$. Do đó phương trình (4) có nghiệm tổng quát là: $x(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i k_i{}^t$. Trong đó c_i $(i = 1, \dots, n)$ là các hằng số.

2) Nếu (4) có các nghiệm đặc trưng phân biệt là $k_1, k_2, \dots, k_r$, với các mũ tương ứng $m_1, m_2, \dots, m_r$ với $m_1 + m_2 + \dots + m_r = n$ thì (4) có các ngiệm cơ bản là $k_i{}^t$, $tk_i{}^t, \dots, t^{m_{i-1}}k_i{}^t, i = 1, \dots, r$.

Nghiệm tổng quát của (4) là:

$y(t) = \sum_{i=1}^{r} k_i{}^t\big(a_{i0} + a_{i1}t + a_{i2}t^2 + \cdots + a_{im_{i-1}}\, t^{m_{i-1}}\big)$ [2].

3) Nếu (5) có nghiệm phức k có biểu diễn hình học $k = \rho(cos\varphi + isin\varphi)$ thì (4) có nghiệm phức $k^t = \rho^t(cos\varphi t + isin\varphi t)$, do đó (5) có các nghiệm độc lập tuyến tính $\rho^t cos\varphi t, \rho^t sin\varphi t$.

Ta biết rằng đa thức với hệ số thực nếu có nghiệm phức thì các nghiệm phức tồn tại theo từng cặp liên hợp. Nếu nghiệm phức này là nghiệm bội thì nghiệm liên hợp kia cũng là nghiệm bội cùng cấp.

Cách xác định nghiệm tổng quát của (4) khi (5) có nghiệm phức tương tự trường hợp 1) và 2) .

2.2.2.4. Bài toán

Bài toán 1. Giải phương trình

$x(t+3) - 3x(t+1) + 2 = 0$ (6)

Giải. Phương trình đặc trưng $k^3 - 3k + 2 = 0$ có các nghiệm là 1 và -2, trong đó 1 là nghiệm bội cấp 2, (-2) là nghiệm đơn, do đó (6) có hệ nghiệm cơ bản là $1^t, t.1^t, (-2)^t$. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình (6) là

$x(t) = c_1.1^t + c_2.t.1^t + c_{3.}(-2)^t$ hay

$x(t) = c_1 + c_2t + c_{3.}(-2)^t$

c_1, c_2, c_3 là hằng số.

Bài toán 2.

Giải phương trình: $x(t+2) + 4x(t) = 0$ (7)

Giải. Phương trình đặc trưng $k^2 + 4 = 0$ có nghiệm $k_1 = 2i = 2\left(cos\frac{\pi}{2} + isin\frac{\pi}{2}\right), k_2 = -2i = 2(cos\frac{\pi}{2} - isin\frac{\pi}{2})$.

Vậy (7) có nghiệm tổng quát

$x(t) = 2^t\left(c_1cos\frac{\pi t}{2} + c_2sin\frac{\pi t}{2}\right), c_1, c_2$ là hằng số.

Bài toán 3. Giải phương trình:

$x(t+4) + 8x(t+2) + 16x(t) = 0$ (8)

Giải. Phương trình đặc trưng $(k^2+4)^2 = 0$ có nghiệm $k_1 = 2i = 2\left(cos\frac{\pi}{2} + isin\frac{\pi}{2}\right), k_2 = -2i = 2\left(cos\frac{\pi}{2} - isin\frac{\pi}{2}\right)$ đều là các nghiệm bội 2, vậy phương trình (7) có nghiệm tổng quát

$x(t) = 2^t\left(c_1cos\frac{\pi t}{2} + c_2sin\frac{\pi t}{2} + c_3tcos\frac{\pi t}{2} + c_4tsin\frac{\pi t}{2}\right)$ với c_1, c_2, c_3, c_4 là hằng số.

2.3. Phương trình sai phân tuyến tính không thuần nhất

Phương trình sai phân tuyến tính cũng có các tính chất giống tính chất phương trình phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất, và cũng được giải bằng phương pháp biến thiên hằng số hay còn gọi là phương pháp Lagranger

2.3.1. Định lý 3. Nếu $x^*(t)$ là nghiệm riêng của (3) và $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$ là hệ nghiệm cơ bản của (2) thì nghiệm tổng quát của phương trình (2) là

$$x(t) = x^*(t) + c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + \cdots c_n\varphi_n(t)$$

Với $c_1, c_2, \dots c_n$ là hằng số tuỳ ý. [2, 5]

2.3.2. Định lý Lagranger.

Nếu $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$ là hệ nghiệm cơ sở của (1) thì nghiệm riêng của (2) có thể tìm được dưới dạng $x^*(t) = C_1(t)\varphi_1(t) + C_2(t)\varphi_2(t) + \dots + C_n(t)\varphi_n(t)$

Trong đó

$$\begin{cases} \varphi_1(t+1)\Delta C_1(t) + \cdots + \varphi_n(t+1)\Delta C_n(t) = 0 \\ \varphi_1(t+2)\Delta C_1(t) + \cdots + \varphi_n(t+2)\Delta C_n(t) = 0 \\ \dots \\ \varphi_1(t+n)\Delta C_1(t) + \cdots + \varphi_n(t+n)\Delta C_n(t) = f(t) \end{cases}$$

[5, tr. 28], với $\Delta C_i(t) = C_i(t+1) - C_i(t)$, i=$\overline{1,n}$

Bài toán 4. Giải phương trình

$x(t+2) - \mathrm{x}(t) = \frac{1}{t^2+t}$.(9)

Giải. Giải phương trình đặc trưng của phương trình tuyến tính thuần nhất tương ứng

$k^2 - 1 = 0$ ta được nghiệm $k_1 = 1; k_2 = -1$, vậy phương trình thuần nhất tương ứng có hệ nghiệm cơ sở $\varphi_1(t) = 1^t, \varphi_2(t) = (-1)^t$. Vậy một nghiệm riêng của phương trình thuần nhất tương ứng có dạng $x^*(t) = C_1(t) + C_2(t)(-1)^t$ Với $C_1(t), C_2(t)$ thoả mãn điều kiện

$$\begin{cases} \Delta C_1(t) + (-1)^{t+1}\Delta C_2(t) = 0 \\ \Delta C_1(t) + (-1)^{t+2}\Delta C_2(t) = \dfrac{1}{t^2+4t} \end{cases}$$

Giải hệ bằng phương pháp định thức ta được

$$\Delta C_1(t) = \frac{1}{2(t^2+4t)} = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+4}\right)$$

$$\Delta C_2(t) = \frac{(-1)^t}{8(t^2+4t)} = \frac{1}{8}.\left(\frac{(-1)^t}{t} - \frac{(-1)^t}{t+4}\right)$$

$$\Delta C_1(1) = C_1(2) - C_1(1) = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{5}\right)$$

$$\Delta C_1(2) = C_1(3) - C_1(2) = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)$$

$$\Delta C_1(3) = C_1(4) - C_1(3) = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7}\right)$$

$$\Delta C_1(4) = C_1(5) - C_1(4) = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right)$$

…

$$\Delta C_1(t-1) = C_1(t) - C_1(t-1) = \tfrac{1}{8}\left(\tfrac{1}{t-1} - \tfrac{1}{t+3}\right)$$

Cộng các vế của các đẳng thức trên và lấy $C_1(1) = 0$, ta được

$$C_1(t) = \sum_{k=1}^{t-1}\frac{1}{8}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+4}\right) = \frac{1}{8}\sum_{k=1}^{t-1}\frac{1}{k} - \frac{1}{8}\sum_{m=5}^{t+3}\frac{1}{m}$$

$$\frac{1}{8}\sum_{k=1}^{4}\frac{1}{k} - \frac{1}{8}\sum_{m=t}^{t+3}\frac{1}{m} =$$

$$= \frac{1}{8}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+2} - \frac{1}{t+3}\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{25}{12} - \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+2} - \frac{1}{t+3}\right]$$

Tương tự, chọn $C_2(1) = 0$, ta được

$$C_2(t) = \sum_{k=1}^{t-1}\frac{1}{8}\left(\frac{(-1)^k}{k} - \frac{(-1)^k}{k+4}\right) =$$

$$= \frac{1}{8}\sum_{k=1}^{t-1}\frac{(-1)^k}{k} - \frac{1}{8}\sum_{m=5}^{t+3}\frac{(-1)^k}{m} =$$

$$= \frac{1}{8}\sum_{k=1}^{4}\frac{(-1)^k}{k} - \frac{1}{8}\sum_{m=t}^{t+3}\frac{(-1)^m}{m} =$$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{-7}{12} - \frac{(-1)^t}{t} + \frac{(-1)^t}{t+1} - \frac{(-1)^t}{t+2} + \frac{(-1)^t}{t+3}\right]$$

Thay $C_1(t), C_2(t)$ vừa tìm được và thay $\varphi_1(t) = 1^t, \varphi_2(t) = (-1)^t$ vào công thức nghiệm tổng quát

$$x(t) = x^*(t) + c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) =$$
$$= C_1(t) + C_2(t)(-1)^t + c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t).$$

ta được nghiệm tổng quát của phương trình (9) là

$$x(t) = \tfrac{1}{8}\left[\tfrac{25}{12} - \tfrac{1}{t} - \tfrac{1}{t+1} - \tfrac{1}{t+2} - \tfrac{1}{t+3}\right] +$$
$$+ \tfrac{1}{8}\left[\tfrac{-7}{12} - \tfrac{(-1)^t}{t} + \tfrac{(-1)^t}{t+1} - \tfrac{(-1)^t}{t+2} + \tfrac{(-1)^t}{t+3}\right](-1)^t +$$
$$+ c_1 + c_2.(-1)^t,$$ với c_1, c_2 là hằng số tuỳ ý.

2.3.3. Phương trình sai phân tuyến tính không thuần nhất hệ số hằng với vế phải đặc thù.

Theo [5], phương trình sai phân tuyến tính không thuần nhất hệ số hằng với vế phải có dạng đặc thù dưới đây có thể tìm được theo cách đơn giản hơn mà không cần sử dụng định ý Lagranger.

Xét phương trình $x(t+n)+a_1x(t+n-1)+\cdots+a_nx(t)=f(t)$ (10),

với $a_i\in\mathbb{R}, a_n\neq 0$ và $f(t)=\rho^t\left(Q_{m_1}(t)\cos\varphi t+Q_{m_2}(t)\sin\varphi t\right)$, trong đó $Q_{m_1}(t), Q_{m_2}(t)$ là đa thức có bậc tương ứng m_1, m_2

Hàm vế phải của (10) gọi là hàm đặc thù. Nếu $\lambda=\rho(\cos\varphi+\text{i}\sin\varphi)$ là nghiệm bội s của phương trình đặc trưng của (10). Khi đó nghiệm riêng của (10) có thể tìm được dưới dạng $x^*(t)=t^s\rho^t(P_m(t)\cos\varphi t+Q_m(t)\sin\varphi t)$, $m=\max\{m_1,m_2\}$, trong đó $P_m(t), Q_m(t)$ là các đa thức bậc m theo t.
Nếu $\lambda=\rho(\cos\varphi+\text{i}\sin\varphi)$ không là nghiệm bội s của phương trình đặc trưng của (10). Khi đó $x^*(t)=\rho^t(P_m(t)\cos\varphi t+Q_m(t)\sin\varphi t)$ $m=\max\{m_1,m_2\}$

Trong trường hợp đặc biệt, $f(t)$ có dạng $f(t)=Q_{m_1}(t)$ là đa thức, đây chính là trường hợp $\rho=1, \varphi=0$, $Q_{m_2}(t)=0$. Ở trường hợp này, ta sẽ kiểm tra xem $\lambda=1.(\cos 0+\text{i}\sin 0)$ tức là $\lambda=1$ có là nghiệm của đa thức đặc trưng hay không. Nếu là nghiệm bội s thì phương trình có nghiệm riêng dạng $x^*(t)=t^s.P_m(t)$, nếu không là nghiệm thì phương trình có nghiệm riêng dạng $x^*(t)=P_m(t)$.

Nếu $f(t)=\text{k}\rho^t$, với k là hằng số. Đây là trường hợp $Q_{m_1}(t)=k$ là đa thức bậc 0 và $\varphi=0$, ta sẽ kiểm tra xem $\lambda=\rho(\cos 0+\text{i}\sin 0)$ hay $\lambda=\rho$ có là nghiệm của phương trình đặc trưng hay không. Từ đó suy ra nghiệm riêng có dạng $x^*(t)=\text{k}\rho^t$hoặc $x^*(t)=\text{k}t^s\rho^t$.

Nếu $f(t)$ có dạng $f(t)=\text{a}\cos\varphi t$ đây là trường hợp $Q_{m_1}(t)$ là đa thức bậc 0, tức là hằng số, còn $Q_{m_2}(t)=0$, $\rho=1$, ta sẽ kiểm tra xem $\lambda=1(\cos\varphi+\text{i}\sin\varphi)$ có là nghiệm bội s của đa thức đặc trưng hay không, từ đó suy ra dạng của nghiệm riêng là

$$x^*(t)=\text{A}\cos\varphi t+\text{B}\sin\varphi t$$

hoặc $x^*(t)=t^s(\text{A}\cos\varphi t+\text{B}\sin\varphi t)$

Để tìm nghiệm riêng, ta thay nghiệm riêng vào phương trình ban đầu (10), tìm các tham số trong nghiệm riêng để có đồng nhất thức.

Bài toán 5. Giải phương trình $x(t+2)-2x(t+1)+x(t)=2t+1.$ (11)
Giải. Phương trình đặc trưng $k^2-2\text{k}+1=0$ có nghiệm kép $k_1=k_2=1$, do đó $\varphi_1(t)=1, \varphi_2(t)=\text{t}$ là hệ nghiệm cơ sở của phương trình thuần nhất tương ứng.
Vì $f(t)=(2t+1).1^t$, với 1 là nghiệm bội 2 của (11) nên nghiệm riêng của (11) có dạng $x_i{}^*(t)=t^2.(at+b)=at^3+bt^2$.

Thay $x_i{}^*(t)$ vào phương trình (11) ta có được:$a(t+2)^3+b(t+2)^2-2[a(t+1)^3+b(t+1)^2]+at^3+bt^2=2t+1$.
hay $6at+6a+2b=2t+1$.
Đồng nhất thức hai vế ta được $a=\frac{1}{3}, b=-\frac{1}{2}$, do đó một nghiệm riêng tìm được là $x_i{}^*(t)(t)=\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2$.
Vậy nghiệm tổng quát của phương trình (11) là $x(t)=c_1+c_2\text{t}+\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2$, với c_1, c_2 là hằng số tuỳ ý.

Có nhiều tài liệu trình bày kết quả trên bằng các cách khác nhau, hoặc đôi khi kết quả được trình bày bằng các liệt kê, phân loại các trường hợp, đôi khi dẫn đến kiến thức trở lên rườm rà, người đọc không hiểu kiến thức cốt lõi và không giải quyết được cho tình huống khác. Ví dụ, theo [1], tác giả xây dựng các công thức cho phương trình sai phân tuyến cấp 1, 2 theo hai chương, kết quả trình bày khá dài, với công thức (10), người đọc hoàn toàn có thể nhớ và biết cách xây dựng công thức và phương pháp giải cho phương trình sai phân tuyến tính cấp n tuỳ ý.

Để minh hoạ cho phương pháp được trình bày trong 2.3.3, tác giả trình bày một trong các dạng bài toán có ứng dụng rộng rãi trong thực tế là bài toán về lãi suất, trong đó có đưa ra hai lời giải để người đọc có thể so sánh.

Bài toán 6. Ngày mùng 5/1/2020 bác Hùng vay ngân hàng 50 triệu đồng với lãi suất kép là $0,6\%$ / tháng. Đúng ngày mùng 5 đầu tháng, kể từ một tháng sau khi vay, bác Hùng đến trả ngân hàng 3 triệu đồng. Hỏi sau bao nhiêu tháng bác Hùng trả hết nợ ngân hàng.

Giải.

Cách 1. Gọi số tiền còn lại sau t tháng là $x(t)$ (triệu đồng), ta có $x(t+1)=x(t).1.006-3$

Hay $x(t+1)-x(t).1{,}006=-3$

Phương trình đặc trưng $k-1{,}006=0$ có nghiệm $k=1{,}006$. Đây là trường hợp phương trình sai phân tuyến tính có vế phải đặc thù với $\rho=1, \varphi=0, m=0$, $P_{m_1}(t)$ là đa thức bậc 0. Vậy nghiệm riêng của phương trình là $x^*(t)=P_0$ với P_0 là hằng số. Do đó phương trình có nghiệm tổng quát $x(t)=c.1.006^t+P_0$. Thay

$x(t)=c.1.006^t+P_0$ vào phương trình ta có

$$(c.1.006^{t+1}+P_0)-(c.1.006^t+P_0)1.006=-3$$

Ta được $P_0 = \frac{3}{0.06} = 500$, do đó $x(t) = c.1{,}006^t + 500$. Thay điều kiện ban đầu $x(0) = 50$ ta được C=-450. Vậy $x(t) = -450.1{,}006^t + 500$.

x(t)=0 khi $t = \log_{1.006}\frac{500}{450} \approx 18$. Vậy bác Hùng trả xong nợ ngân hàng sau 18 tháng.

Cách 2. Gọi số tiền vay ban đầu là *x*, *n* là số tháng phải trả, *A* là số tiền phải trả hàng tháng để sau *n* tháng hết nợ. Ta có

Số tiền gốc cuối tháng 1:

$N + Nx - A = N(x+1) - A$

Số tiền gốc cuối tháng 2:

$[N(x+1) - A] + +[N(x+1) - A]x - A = N(x+1)^2 - A[(x+1) + 1]$

Cuối tháng n: $N(x+1)^n - A[(x+1)^{n-1} + +(x+1)^{n-2} + \cdots (x+1) + 1]$

Trả hết nợ sau tháng thứ n, số tiền sẽ bằng 0.

Ta có: $N(x+1)^n = A[(x+1)^{n-1} + +(x+1)^{n-2} + \cdots (x+1) + 1]$

Đặt $y = x + 1 = 1{,}006$ ta được

$Ny^n = A[y^{n-1} + +y^{n-2} + \cdots y + 1]$

$Ny^n = A\frac{1-y^n}{1-y} \Leftrightarrow Nxy^n = A(y^n - 1)$

$\Leftrightarrow 50.\frac{0.6}{100}.y^n = 3.(y^n - 1) \Leftrightarrow y^n = \frac{10}{9}$

$\Leftrightarrow n = \log_y \frac{10}{9}$. Vậy $n \approx 18$

Với cách 2, ta phải xây dựng quy luật của dãy số. Không phải trường hợp nào ta cũng dễ dàng phát hiện quy luật của dãy số, vì vậy lời giải tương đối phức tạp. Cách 1 sử dụng phương pháp giải phương trình sai phân tuyến tính với hệ số hằng, bài toán trở nên đơn giản. Hơn nữa, ta có thể dễ dàng giải được bài toán trong tình huống đề bài thay đổi.

3. KẾT LUẬN

Trong bài viết, tác giả đã trình bày khái quát và tương đối toàn diện các vấn đề liên quan đến phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng, cùng các ví dụ minh hoạ điển hình, giúp người đọc có cái nhìn hệ thống về lý thuyết phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng. Nhiều tài liệu trình bày cách giải phương trình sai phân (thông qua bài toán dãy số) khá phức tạp, bài viết này có thể giúp người đọc có định hướng rõ ràng và đơn giản khi giải phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng, tránh được việc phải sử dụng các mẹo hay phương pháp phức tạp khác.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Lê Đình Thịnh (2001), *Phương trình sai phân và một vài ứng dụng,* NXB Giáo dục
2. Đỗ Hữu Hoà (2017),), *Phương trình sai phân tuyến tính cấp cao và ứng dụng*, *https://luanvan123.info/threads/phuong-trinh-sai-phan-tuyen-tinh-cap-cao-va-ung-dung.179385/*
3. Nguyễn Tiến Tuấn (2015), *Phương trình sai phân và ứng dụng*
https://lovetoan.wordpress.com/wp-content/uploads/2020/10/phuong-trinh-sai-phan-va-ung-dung.pdf
4. Trọng Nhân (2018*), Dãy số Fhibonacci và những ứng dụng trong tự nhiên*
https://tuoitre.vn/day-so-fibonacci-va-nhung-bi-an-trong-tu-nhien-20180313151043875.htm
5. Võ Thị Hường (2021), *Phương trình sai phân hệ số hằng và một vài ứng dụng*, https://tailieu.vn/doc/chuong-vi-phuong-trinh-sai-phan-865206.html

Thông tin của tác giả*:*

Ths. Nguyễn Thanh Huyền
Trưởng bộ môn Toán, Trường Đại học Công nghiệp Quảng Ninh
Điện thoại: +(84).799.242.995 - Email: nguyenthanhhuyen@qui.edu.vn

METHOD FOR SOLVING LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH CONSTANT COEFFICIENTS

Information about authors:

MMath. Nguyen Thanh Huyen

Head of Mathematics Department, Quang Ninh University of Industry

Email: nguyenthanhhuyen@qui.edu.vn

ABSTRACT:

In the article, the author presents an overview of the method for solving linear difference equations with constant coefficients. Including: theory of solutions of linear difference equations, method of solving linear difference equations with constant coefficients. The above results were obtained by the author collecting and selecting documents from sources such as textbooks, master's theses, and articles, helping readers have an overview of the method of solving equations, thereby determining Quickly guide how to solve problems related to difference equations.

Keywords: *Formula, series, interest rate, difference, linearity.*

REFERENCES

1.Le Dinh Thinh (2001), *Difference equations and some applications*, Education Publishing House

2. Do Huu Hoa (2017), *High-level linear difference equations and applications*, *https://luanvan123.info/threads/phuong-trinh-sai-phan-tuyen-tinh-cap-cao-va -ung-dung.179385/*

3. Nguyen Tien Tuan (2015), Difference equations and applications, *https://lovetoan.wordpress.com/wp-content/uploads/2020/10/phuong-trinh-sai-phan-va-ung-dung.pdf*

4. Trong Nhan (2018), Fhibonacci sequence and applications in nature, *https://tuoitre.vn/day-so-fibonacci-va-nhung-bi-an-trong-tu-nhien-20180313151043875.htm*

5. Vo Thi Huong (2021), Constant coefficient difference equation and some applications, *https://tailieu.vn/doc/chuong-vi-phuong-trinh-sai-phan-865206.html*

Ngày nhận bài: 20/12/2024;
Ngày gửi phản biện: 21/12 /2024;
Ngày nhận phản biện: 26/12/2024;
Ngày chấp nhận đăng: 02/01/2025.